１．$\theta=-\dfrac{15}{2}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

２．半径が１２，中心角が $\dfrac{7}{12}\pi$ である扇形の弧の長さと面積を求めよ。

３．$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ のとき次の値を求めよ。ただし，$\alpha$ は第２象限の角，$\beta$ は第４象限の角とする。

⑴ $\sin(\alpha+\beta)$

⑵ $\cos(\alpha-\beta)$

４．$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。

⑴ $\sin\theta\cos\theta$

⑵ $\sin\theta-\cos\theta$

５．２直線 $y=x$，$y=(2-\sqrt{3})x$ のなす角 $\theta$ を求めよ。ただし，$\theta$ は鋭角とする。

６．$\pi<\alpha<2\pi$ とする。$\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

⑴ $\sin 2\alpha$

⑵ $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

⑶ $\cos 3\alpha$

7．次の関数において，与えられた定義域における最大値・最小値と，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

(1) $y=\cos 2\theta-2\sin\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

(2) $y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta+1 \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

8．次の方程式，不等式を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $2\sin^2\theta+2\geqq-7\cos\theta$

(2) $\sqrt{3}\tan\theta-1<0$

(3) $\sin\left(2\theta-\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$

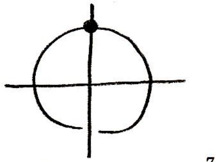
(4) $\cos 4\theta+\cos 2\theta=0$

数学演習（三角関数）Ｈ２１．１．１４　　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ ）

１．$\theta=-\frac{15}{2}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\theta = -8\pi + \frac{1}{2}\pi$

$= 2\pi\times(-4) + \frac{1}{2}\pi$



$\sin\theta = 1$

$\cos\theta = 0$

$\tan\theta$ は存在しない

5

２．半径が１２，中心角が $\frac{7}{12}\pi$ である扇形の弧の長さと面積を求めよ。

$l = r\theta = 12\cdot\frac{7}{12}\pi = 7\pi$

$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 7\pi = 42\pi$

5

３．$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$ のとき次の値を求めよ。ただし，$\alpha$ は第２象限の角，$\beta$ は第４象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ 　$\alpha$ は第２象限 より $\cos\alpha<0$

よって $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$ 　$\beta$ は第４象限 より $\sin\beta<0$

よって $\sin\beta = -\frac{5}{13}$

∴ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}$

5

(2) $\cos(\alpha-\beta)$

∴ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= -\frac{48+15}{65} = -\frac{63}{65}$

5

４．$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ であるとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$

$2\sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{5}$

∴ $\sin\theta\cos\theta = -\frac{2}{5}$

5

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$ 　((1)より)

$= 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

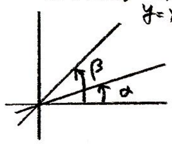
∴ $\sin\theta-\cos\theta = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

ここで $\frac{1}{2}\pi<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

よって $\sin\theta-\cos\theta>0$ となるので $\sin\theta-\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$

5

５．２直線 $y=x$，$y=(2-\sqrt{3})x$ のなす角 $\theta$ を求めよ。ただし，$\theta$ は鋭角とする。




$y=x$ と x軸のなす角度を $\beta$

$y=(2-\sqrt{3})x$ 〃 $\alpha$ とする。

すると $\tan\alpha = 2-\sqrt{3}$, $\tan\beta = 1$

また

$\tan\theta = |\tan(\beta-\alpha)|$

$= \left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$

$= \left|\frac{1-(2-\sqrt{3})}{1+1\cdot(2-\sqrt{3})}\right|$

$= \left|\frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right|$

$= \left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\right|$

$= \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ より

$\theta = \frac{1}{6}\pi$

5

６．$\pi<\alpha<2\pi$ とする。$\cos\alpha=\frac{1}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin2\alpha$

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

$\pi<\alpha<2\pi$ より $\sin\alpha<0$

∴ $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\cdot\frac{1}{5} = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$

5

(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$

$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$

∴ $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ 　　第２象限

ここで $\pi<\alpha<2\pi$ より $\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}\alpha<\pi$

よって $\cos\frac{1}{2}\alpha<0$ より

$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

5

(3) $\cos3\alpha$

$\cos3\alpha = \cos(\alpha+2\alpha)$

$= \cos\alpha\cos2\alpha - \sin\alpha\sin2\alpha$

$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1) - \sin\alpha\cdot2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1) - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$= 4\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{125} - \frac{3}{5} = -\frac{71}{125}$

7．次の関数において，与えられた定義域における最大値·最小値と，そのときの$\theta$の値を求めよ。

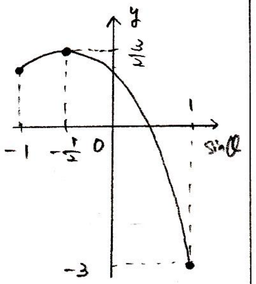
(1) $y=\cos 2\theta-2\sin\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

$y = 1-2\sin^2\theta-2\sin\theta$

$= -2(\sin^2\theta+\sin\theta)+1$

$= -2\{(\sin\theta+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+1$

$= -2(\sin\theta+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$




$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $(\theta=\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi)$ の時 最大

$\sin\theta=1$ $(\theta=\frac{1}{2}\pi)$ の時 最小

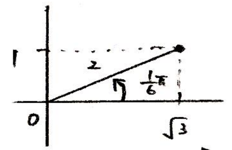
10

以上より 最大値 $\frac{3}{2}$ $(\theta=\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi)$，最小値 $-3$ $(\theta=\frac{\pi}{2})$

(2) $y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta+1 \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

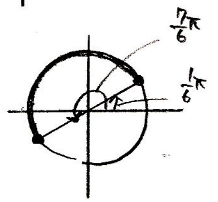
$y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta+1$

$=2\sin(\theta+\frac{1}{6}\pi)+1$




ここで，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$\frac{1}{6}\pi\leqq\theta+\frac{1}{6}\pi\leqq\frac{7}{6}\pi$




$\therefore$

$-\frac{1}{2}\leqq\sin(\theta+\frac{1}{6}\pi)\leqq 1$ $)\times 2$

$-1\leqq 2\sin(\theta+\frac{1}{6}\pi)\leqq 2$ $)+1$

$0\leqq 2\sin(\theta+\frac{1}{6}\pi)+1\leqq 3$ より $0\leqq y\leqq 3$

ここで，$y$の最小は，$\sin(\theta+\frac{1}{6}\pi)=-\frac{1}{2}$ の時で

$\theta+\frac{1}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$ より $\theta=\pi$.

$y$の最大は，$\sin(\theta+\frac{1}{6}\pi)=1$ の時で

$\theta+\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi$ より $\theta=\frac{1}{3}\pi$.

10

以上より 最大値 3 $(\theta=\frac{1}{3}\pi)$，最小値 0 $(\theta=\pi)$

8．次の方程式，不等式を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1) $2\sin^2\theta+2\geqq-7\cos\theta$

$2(1-\cos^2\theta)+2+7\cos\theta\geqq 0$.

$\therefore$

$2\cos^2\theta-7\cos\theta-4\leqq 0$.

$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -8 \\ & & -7 \end{array}$

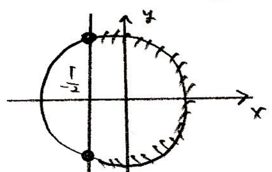
$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-4)\leqq 0$.

ここで $0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

よって $\cos\theta-4$ は $\theta$がいくつであっても必ず負の数

$\therefore$ $2\cos\theta+1\geqq 0$.

$\cos\theta\geqq-\frac{1}{2}$



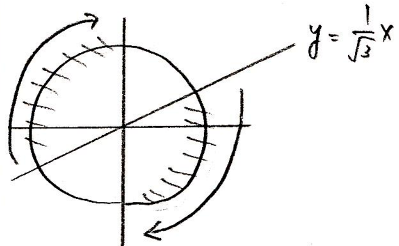

$\therefore$ $0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$

$\frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

5

(2) $\sqrt{3}\tan\theta-1<0$

$\tan\theta<\frac{1}{\sqrt{3}}$




図より $0\leqq\theta<\frac{1}{6}\pi$

$\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{7}{6}\pi$

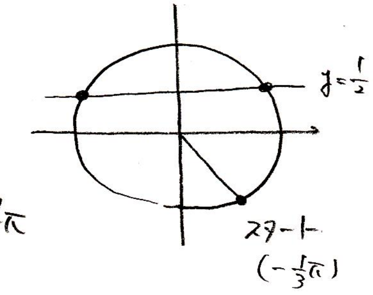
$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

5

(3) $\sin\left(2\theta-\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ $)\times 2$

$0\leqq 2\theta<4\pi$




$-\frac{1}{3}\pi\leqq 2\theta-\frac{1}{3}\pi<4\pi-\frac{1}{3}\pi$

よって $\sin(2\theta-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}$

となるのは

$2\theta-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi+2\pi, \frac{5}{6}\pi+2\pi$

$\therefore$ $2\theta=\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi+2\pi, \frac{7}{6}\pi+2\pi$

$\therefore$ $\theta=\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{1}{4}\pi+\pi, \frac{7}{12}\pi+\pi$

$=\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{19}{12}\pi$

10

(4) $\cos 4\theta+\cos 2\theta=0$

和積の公式 より

$\cos 4\theta+\cos 2\theta=2\cos\frac{4\theta+2\theta}{2}\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}$

$\therefore$

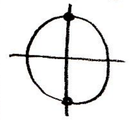
$\cos 4\theta+\cos 2\theta=2\cos 3\theta\cos\theta$.

よって $2\cos 3\theta\cos\theta=0$

$\therefore$ $\cos 3\theta=0$ または $\cos\theta=0$.

・$\cos 3\theta=0$ の時

$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq 3\theta<6\pi$



$\therefore$ $3\theta=\frac{1}{2}\pi+2n\pi$

$\frac{3}{2}\pi+2n\pi$

$(n=0, 1, 2)$

より $\theta=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}n\pi$ $(\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi)$

$\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}n\pi$ $(\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi)$

・$\cos\theta=0$

より $\theta=\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

以上より

$\theta=\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi$

$\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$

10