

6. $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、次の方程式を解け。

$\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$

7. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。 $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ 、 $\cos 3\theta$ の値を求めよ。

8. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $-\sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta = \sqrt{3}$

(2) $-\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1 > 0$

9. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、関数 $y = \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + 3\sin^2 \theta$ の最大値と最小値を求めよ。
また、そのときの θ の値を求めよ。

10. 関数 $f(\theta) = \sin 2\theta + 2(\sin \theta - \cos \theta) - 1$ を考える。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

(1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め、そのときの θ の値を求めよ。

1. 次の値を求めよ。

(1) $\cos \frac{5}{12}\pi$ (2) $\cos \frac{7}{8}\pi$

解答 (1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

別解 $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin^2 \frac{3}{8}\pi = \sin^2 \frac{\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1-\cos \frac{3}{4}\pi}{2}$
 $= \frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\sin \frac{3}{8}\pi > 0$ であるから $\sin \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = -\frac{15}{17}$ のとき, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ の値をそれぞれ求めよ。

解答 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{33}{65}$,

解説

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であるから $\cos \alpha > 0$, $\cos \beta < 0$

ゆえに $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$

よって $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{16}{65}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{33}{65}$

3. 2 直線 $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$, $3\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

解答 $\theta = \frac{\pi}{3}$

解説

2 直線の方程式を変形すると

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$, $y = -3\sqrt{3}x + 1$

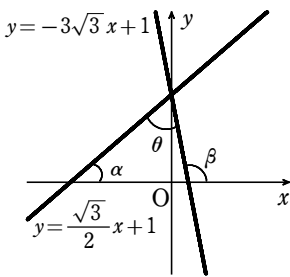
図のように, 2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を, それぞれ α , β とすると, 求める鋭角 θ は

$\theta = \beta - \alpha$

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \beta = -3\sqrt{3}$ で,

$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$
 $= \left(-3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \div \left\{ 1 + (-3\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \sqrt{3}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \frac{\pi}{3}$



4. a を定数とし, $f(x) = \cos^2 x + 2a \sin x + 4a^2$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) とする. $f(x)$ の最大値を求めよ。

解答 $a < 0$ のとき $4a^2 + 1$, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき $5a^2 + 1$, $\frac{1}{2} < a$ のとき $4a^2 + a + \frac{3}{4}$

解説

(1) $f(x) = (1 - \sin^2 x) + 2a \sin x + 4a^2 = -\sin^2 x + 2a \sin x + 4a^2 + 1$

$\sin x = t$, $f(x) = g(t)$ とおくと

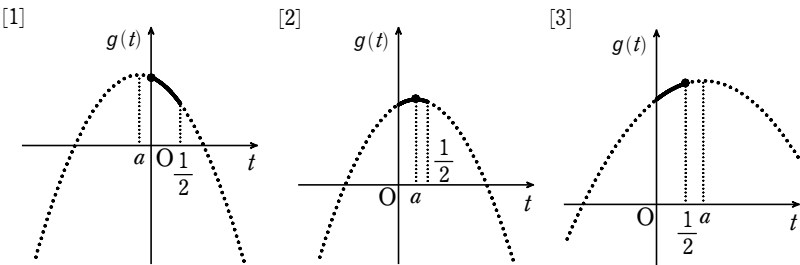
$g(t) = -t^2 + 2at + 4a^2 + 1 = -(t - a)^2 + 5a^2 + 1$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ であるから $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

[1] $a < 0$ のとき $g(t)$ は $t = 0$ で最大値 $g(0) = 4a^2 + 1$ をとる。

[2] $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき $g(t)$ は $t = a$ で最大値 $g(a) = 5a^2 + 1$ をとる。

[3] $\frac{1}{2} < a$ のとき $g(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最大値 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 4a^2 + a + \frac{3}{4}$ をとる。



5. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta - \sqrt{2} \sin \theta = 0$

(2) $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$

(3) $\sin 2\theta - \cos \theta \leq 0$

(4) $\cos \theta + 3\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} + 4 > 0$

解答 (1) $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{7}{4}\pi$ (2) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(3) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ (4) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

解説

(1) 方程式から $2\sin \theta \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta = 0$

ゆえに $\sin \theta (2\cos \theta - \sqrt{2}) = 0$ よって $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$\sin \theta = 0$ より $\theta = 0, \pi$ $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$

以上から, 解は $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{7}{4}\pi$

(2) 方程式から $2\cos^2 \theta - 1 + \cos \theta + 1 = 0$

ゆえに $\cos \theta (2\cos \theta + 1) = 0$ よって $\cos \theta = 0, -\frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$\cos \theta = 0$ より $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

以上から, 解は $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(3) 不等式から $2\sin \theta \cos \theta - \cos \theta > 0$

ゆえに $\cos \theta (2\sin \theta - 1) > 0$

したがって

$\begin{cases} \cos \theta > 0 \\ \sin \theta > \frac{1}{2} \end{cases}$ ① または $\begin{cases} \cos \theta < 0 \\ \sin \theta < \frac{1}{2} \end{cases}$ ②

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$\cos \theta > 0$ より $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

$\sin \theta > \frac{1}{2}$ より $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

① の解は, 共通範囲をとって $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ③

$\cos \theta < 0$ より $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$

$\sin \theta < \frac{1}{2}$ より $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

② の解は, 共通範囲をとって $\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ ④

求める解は, ③, ④ の範囲を合わせて

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

(4) 不等式から $\left(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) - 3\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} + 4 \leq 0$

整理して $2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 3\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} + 3 \leq 0$

ゆえに $\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} \right) \left(2\cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} \right) \leq 0$

常に $\cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} < 0$ であるから $2\cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} \geq 0$

よって $\cos \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

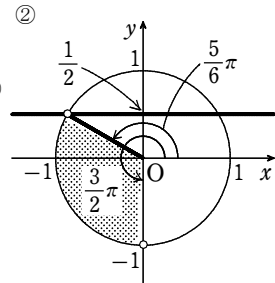
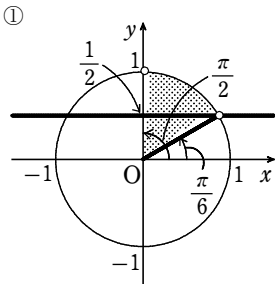
$0 \leq \theta < 2\pi$ より, $0 \leq \frac{\theta}{2} < \pi$ であるから $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{6}$

したがって, 解は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

6. $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, 次の方程式を解け。

$\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$

解答 $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$



解説

与式から $(\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \sin 3\theta = 0$

ここで和積の公式から

$$\begin{aligned}\sin 2\theta + \sin 4\theta &= 2\sin \frac{2\theta + 4\theta}{2} \cos \frac{2\theta - 4\theta}{2} = 2\sin 3\theta \cos(-\theta) \\ &= 2\sin 3\theta \cos \theta\end{aligned}$$

よって $2\sin 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta = 0$

すなわち $\sin 3\theta(2\cos \theta + 1) = 0$

したがって $\sin 3\theta = 0$ または $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leq \theta \leq \pi$ であるから $0 \leq 3\theta \leq 3\pi$

この範囲で $\sin 3\theta = 0$ を解くと $3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

よって $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$

$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ を解くと $\theta = \frac{2}{3}\pi$

したがって、解は $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$

7. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。 $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ のとき、 $\sin 2\theta$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\cos 3\theta$ の値を求めよ。

【解答】 $\cos 2\theta = -\frac{1}{9}$, $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\sin 3\theta = \frac{7\sqrt{5}}{27}$

解説

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$$

次に $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) \right\} = \frac{5}{6}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より、 $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから $\sin \frac{\theta}{2} > 0$

ゆえに $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

また $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より、 $\sin \theta > 0$ であるから $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

よって

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2\sin \theta \cos \theta \cdot \cos \theta + (1 - 2\sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2\sin \theta(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \\ &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta\end{aligned}$$

ゆえに $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta = 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - 4 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^3 = \frac{7\sqrt{5}}{27}$

8. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $-\sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta = \sqrt{3}$ (2) $-\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1 > 0$

【解答】 (1) $\theta = 0, \frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi, \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

解説

(1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$ であるから、方程式は

$$2\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \quad \text{すなわち} \quad \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{3} \leq t < 2\pi + \frac{\pi}{3}$

この範囲で $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $t = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

よって、解は $\theta = t - \frac{\pi}{3}$ より $\theta = 0, \frac{\pi}{3}$

(2) 不等式から $\sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1 < 0$

$\sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta = 2\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right)$ であるから、不等式は

$$2\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) + 1 < 0 \quad \text{すなわち} \quad \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) < -\frac{1}{2}$$

$2\theta - \frac{\pi}{6} = t$ とおくと、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6} \leq t < 4\pi - \frac{\pi}{6}$

この範囲で $\sin t < -\frac{1}{2}$ を解くと

$$\frac{7}{6}\pi < t < \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi < t < \frac{23}{6}\pi$$

すなわち $\frac{7}{6}\pi < 2\theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi < 2\theta - \frac{\pi}{6} < \frac{23}{6}\pi$

よって $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi, \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

9. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、関数 $y = \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + 3\sin^2 \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

また、そのときの θ の値を求めよ。

【解答】 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 0

解説

$$\begin{aligned}y &= \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 2\cos^2 \theta - 1 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + 2 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \\ &= \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

すなわち $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$ であるから、この範囲で y は

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{のとき最大値} \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき最小値} \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

をとる。

10. 関数 $f(\theta) = \sin 2\theta + 2(\sin \theta - \cos \theta) - 1$ を考える。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

(1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め、そのときの θ の値を求めよ。

【解答】 (1) $f(\theta) = t^2 + 2t - 2$ (2) $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$; $\theta = \pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

解説

(1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ の両辺を 2 乗すると

$$t^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

ゆえに $t^2 = 1 + \sin 2\theta$ よって $\sin 2\theta = t^2 - 1$

したがって $f(\theta) = t^2 - 1 + 2t - 1 = t^2 + 2t - 2$

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ …… ② であるから

$$-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \quad \text{よって} \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

(3) (1) から $f(\theta) = t^2 + 2t - 2 = (t+1)^2 - 3$

$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ の範囲において $f(\theta)$ は
 $t = \sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$, $t = -1$ で最小値 -3 をとる。

$t = \sqrt{2}$ のとき、① から $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = 1$

② の範囲で解くと $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$

$t = -1$ のとき、① から $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

② の範囲で解くと $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ すなわち $\theta = \pi, \frac{3}{2}\pi$

よって $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$; $\theta = \pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

