数学演習（加法定理）Ｈ２３．５．１３　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　)

1．次の値を求めよ。

(1) $\cos\frac{\pi}{12}$　　(2) $\sin\frac{3}{8}\pi$

2．$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値をそれぞれ求めよ。

3．2 直線 $\sqrt{3}x-2y+2=0$，$3\sqrt{3}x+y-1=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

4．a を定数とし，$f(x)=\cos^2 x+2a\sin x+4a^2$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}\right)$ とする。$f(x)$ の最大値を求めよ。

5．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta-\sqrt{2}\sin\theta=0$　　(2) $\cos 2\theta+\cos\theta+1=0$

(3) $\sin 2\theta-\cos\theta>0$　　(4) $\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4\leqq 0$

６. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

７. $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。$\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

８. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{3}$

(2) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta - 1 > 0$

９. $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

10. 関数 $f(\theta) = \sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) - 1$ を考える。ただし， $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくとき， $f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ。

数学演習（加法定理）Ｈ２３．５．１３　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の値を求めよ。

(1) $\cos\frac{\pi}{12}$　　　(2) $\sin\frac{3}{8}\pi$

解答　(1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　(2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

解説

(1) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

別解　$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin^2\frac{3}{8}\pi=\sin^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2}$

$=\frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{3}{8}\pi>0$ であるから　　$\sin\frac{3}{8}\pi=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2．$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値をそれぞれ求めよ。

解答　$\sin(\alpha+\beta)=\frac{16}{65}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{33}{65}$，

解説

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　　$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$

ゆえに　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$

よって　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{16}{65}$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{33}{65}$

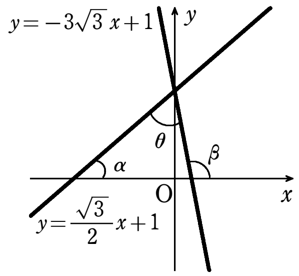
3．2 直線 $\sqrt{3}x-2y+2=0$，$3\sqrt{3}x+y-1=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

解答　$\theta=\frac{\pi}{3}$

解説

2 直線の方程式を変形すると

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$，$y=-3\sqrt{3}x+1$



図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める鋭角 θ は

$\theta=\beta-\alpha$

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=-3\sqrt{3}$ で，

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\left(-3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left\{1+(-3\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\sqrt{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\frac{\pi}{3}$

4．a を定数とし，$f(x)=\cos^2x+2a\sin x+4a^2$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}\right)$ とする。$f(x)$ の最大値を求めよ。

解答　$a<0$ のとき $4a^2+1$，$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $5a^2+1$，$\frac{1}{2}<a$ のとき $4a^2+a+\frac{3}{4}$

解説

(1) $f(x)=(1-\sin^2x)+2a\sin x+4a^2=-\sin^2x+2a\sin x+4a^2+1$

$\sin x=t$，$f(x)=g(t)$ とおくと

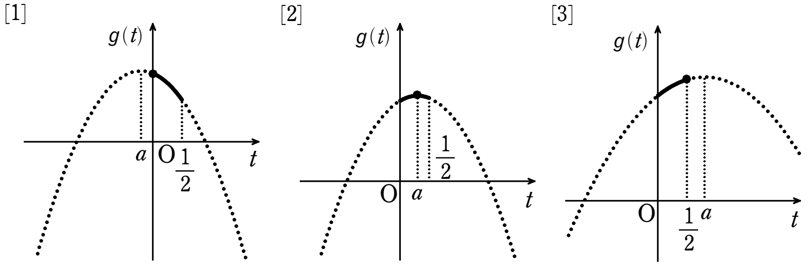
$g(t)=-t^2+2at+4a^2+1=-(t-a)^2+5a^2+1$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ であるから　　$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$

[1]　$a<0$ のとき　　$g(t)$ は $t=0$ で最大値 $g(0)=4a^2+1$ をとる。

[2]　$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　　$g(t)$ は $t=a$ で最大値 $g(a)=5a^2+1$ をとる。

[3]　$\frac{1}{2}<a$ のとき　　$g(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ で最大値 $g\left(\frac{1}{2}\right)=4a^2+a+\frac{3}{4}$ をとる。



5．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin2\theta-\sqrt{2}\sin\theta=0$　　　(2) $\cos2\theta+\cos\theta+1=0$

(3) $\sin2\theta-\cos\theta>0$　　　(4) $\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4\leqq0$

解答　(1) $\theta=0$，$\frac{\pi}{4}$，π，$\frac{7}{4}\pi$　　(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

(3) $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$　　(4) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

解説

(1) 方程式から　　$2\sin\theta\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta=0$

ゆえに　　$\sin\theta(2\cos\theta-\sqrt{2})=0$　　　よって　　$\sin\theta=0$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=0$ より　　$\theta=0$，π　　　$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ より　　$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\frac{7}{4}\pi$

以上から，解は　　$\theta=0$，$\frac{\pi}{4}$，π，$\frac{7}{4}\pi$

(2) 方程式から　　$2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=0$

ゆえに　　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$　　　よって　　$\cos\theta=0$，$-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=0$ より　　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$　　　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

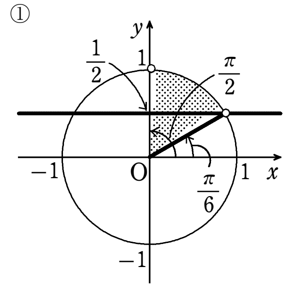
以上から，解は　　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

(3) 不等式から　　$2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta>0$

ゆえに　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)>0$

したがって

$\begin{cases}\cos\theta>0\\ \sin\theta>\frac{1}{2}\end{cases}$ ……①　または　$\begin{cases}\cos\theta<0\\ \sin\theta<\frac{1}{2}\end{cases}$ ……②



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta>0$ より　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

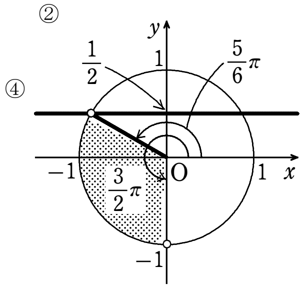
$\sin\theta>\frac{1}{2}$ より　　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

① の解は，共通範囲をとって　　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$　……③

$\cos\theta<0$ より　　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta<\frac{1}{2}$ より　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

② の解は，共通範囲をとって　　$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$　……④



求める解は，③，④ の範囲を合わせて

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

(4) 不等式から　　$\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4\leqq0$

整理して　　$2\cos^2\frac{\theta}{2}-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+3\leqq0$

ゆえに　　$\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)\leqq0$

常に $\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}<0$ であるから　　$2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\geqq0$

よって　　$\cos\frac{\theta}{2}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$0\leqq\frac{\theta}{2}<\pi$ であるから　　$0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{6}$

したがって，解は　　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

6．$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$\sin2\theta+\sin3\theta+\sin4\theta=0$

解答　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

解説

与式から　$(\sin 2\theta+\sin 4\theta)+\sin 3\theta=0$

ここで和積の公式から

$$\sin 2\theta+\sin 4\theta=2\sin\frac{2\theta+4\theta}{2}\cos\frac{2\theta-4\theta}{2}=2\sin 3\theta\cos(-\theta)$$
$$=2\sin 3\theta\cos\theta$$

よって　$2\sin 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta=0$

すなわち　$\sin 3\theta(2\cos\theta+1)=0$

したがって　$\sin 3\theta=0$　または　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$0\leqq 3\theta\leqq 3\pi$

この範囲で $\sin 3\theta=0$ を解くと　$3\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

7. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\cos\theta=-\frac{2}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin\frac{\theta}{2}$，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos 2\theta=-\frac{1}{9}$，$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，$\sin 3\theta=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

解説

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{9}$$

次に　$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=\frac{5}{6}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\frac{\theta}{2}>0$

ゆえに　$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

また　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

よって

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(2\theta+\theta)\\&=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\&=2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

ゆえに　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

8. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{3}$　　(2)　$\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta-1>0$

解答　(1)　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3}$　　(2)　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi,\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$　すなわち　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{3}$

この範囲で $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと　$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，解は　$\theta=t-\frac{\pi}{3}$ より　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3}$

(2)　不等式から　$\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+1<0$

$\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1<0$　すなわち　$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}$

$2\theta-\frac{\pi}{6}=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　$-\frac{\pi}{6}\leqq t<4\pi-\frac{\pi}{6}$

この範囲で $\sin t<-\frac{1}{2}$ を解くと

$$\frac{7}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi<t<\frac{23}{6}\pi$$

すなわち　$\frac{7}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{23}{6}\pi$

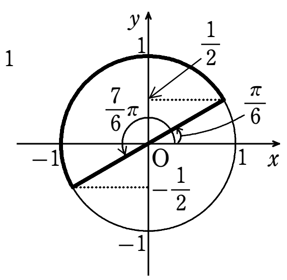
よって　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi,\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

9. $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 0

解説

$$\begin{aligned}y&=\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1\\&=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)-1\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}\\&=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\end{aligned}$$



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq 2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

すなわち $\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$ であるから，この範囲で y は

$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

をとる。

10. 関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1$ を考える。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ。

解答　(1)　$f(\theta)=t^2+2t-2$　　(2)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

解説

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗すると

$$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

ゆえに　$t^2=1+\sin 2\theta$　　よって　$\sin 2\theta=t^2-1$

したがって　$f(\theta)=t^2-1+2t-1=t^2+2t-2$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　……①

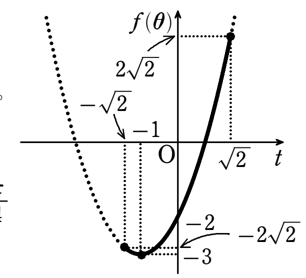
$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$　……② であるから

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　　よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　(1) から　$f(\theta)=t^2+2t-2=(t+1)^2-3$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において $f(\theta)$ は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$t=-1$ で最小値 -3 をとる。



$t=\sqrt{2}$ のとき，① から　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$

② の範囲で解くと　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{4}$

$t=-1$ のとき，① から　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

② の範囲で解くと　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3