数学演習（三角関数の最大•最小）Ｈ２２．１．２１　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=2\sin\theta \quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi\right)$

(2) $y=\cos\theta-2 \quad \left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi\right)$

２．関数 $y=2\sin\theta+2\cos^2\theta-1 \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値・最小値，および最大値・最小値を与える θ の値を求めよ。

３．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2) $y=\cos^2\theta+4\sin\theta-1 \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

(3) $y=2\sin^2\theta+2\cos\theta+4 \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

４．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1 \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2) $y=-\sin^2\theta-\cos\theta \quad \left(\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$

数学演習（三角関数の最大･最小）Ｈ２２．１．２１

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=2\sin\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi\right)$　　(2)　$y=\cos\theta-2$　$\left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi\right)$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$\theta=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -1

(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $-\frac{3}{2}$，$\theta=\pi$ のとき最小値 -3

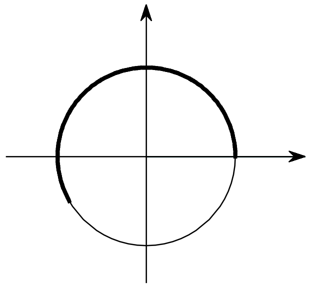
解説

(1)　図より，y は

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2\cdot1=2$,

$\theta=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

をとる。

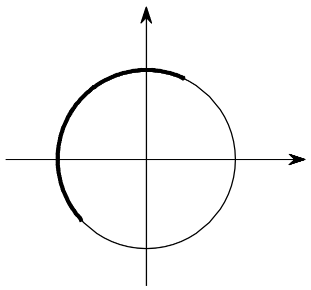


(2)　図より y は

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

$\theta=\pi$ のとき最小値 $-1-2=-3$

をとる。



2．関数 $y=2\sin\theta+2\cos^2\theta-1$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値･最小値，および最大値･最小値を与える θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{3}{2}$，$\theta=-\frac{\pi}{2}$ で最小値 -3

解説

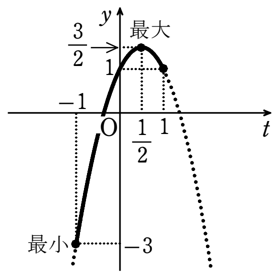
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから

$y=2\sin\theta+2(1-\sin^2\theta)-1=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+1$

$\sin\theta=t$ とおくと，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　　$-1\leqq t\leqq1$

y を t で表すと

$y=-2t^2+2t+1=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$



$-1\leqq t\leqq1$ の範囲で，y は

$t=\frac{1}{2}$　で最大値 $\frac{3}{2}$,

$t=-1$ で最小値 -3 をとる。

また，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから

$t=\frac{1}{2}$ となるとき，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ から　　$\theta=\frac{\pi}{6}$

$t=-1$ となるとき，$\sin\theta=-1$ から　　$\theta=-\frac{\pi}{2}$

よって，この関数は　$\theta=\frac{\pi}{6}$　で最大値 $\frac{3}{2}$,

$\theta=-\frac{\pi}{2}$ で最小値 -3　をとる。

3．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2)　$y=\cos^2\theta+4\sin\theta-1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(3)　$y=2\sin^2\theta+2\cos\theta+4$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

解答　(1)　$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 1，$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 3，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5

(3)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{2}$，$\theta=\pi$ のとき最小値 2

解説

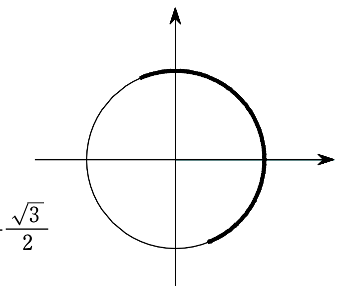
(1)　図より　y は

$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\pi$ のとき最大値 1,

$\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

をとる。よって

$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 1，$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから

$y=\cos^2\theta+4\sin\theta-1=(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta-1=-\sin^2\theta+4\sin\theta$

$\sin\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$-1\leqq x\leqq1$　…… ①

y を x の式で表すと

$y=-x^2+4x=-(x^2-4x+2^2)+2^2$

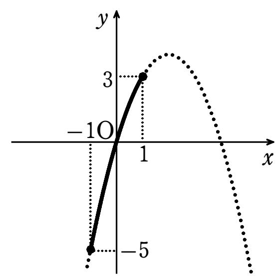
$=-(x-2)^2+4$

① の範囲において，y は

$x=1$　のとき最大値 3,

$x=-1$ のとき最小値 -5

をとる。



また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$x=1$　となるのは，$\sin\theta=1$　より　　$\theta=\frac{\pi}{2}$

$x=-1$ となるのは，$\sin\theta=-1$ より　　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

のときである。

よって，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 3，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5

(3)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$y=2(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta+4=-2\cos^2\theta+2\cos\theta+6$

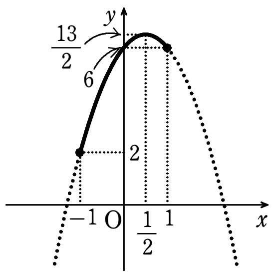
$\cos\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　　$-1\leqq x\leqq1$　…… ①

y を x の式で表すと

$y=-2x^2+2x+6$

$=-2\left\{x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+6$

$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2}$



① の範囲において，y は

$x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{13}{2}$

$x=-1$ のとき最小値 2

をとる。

また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから

$x=\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{\pi}{3}$

$x=-1$ となるのは，$\cos\theta=-1$ より　　$\theta=\pi$

のときである。

よって，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{2}$，$\theta=\pi$ のとき最小値 2

4．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(2)　$y=-\sin^2\theta-\cos\theta$　$\left(\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 3，$\theta=\pi$ のとき最小値 0

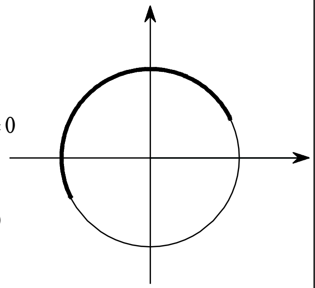
(2)　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

解説

(1)　図より，y は

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2\cdot1+1=3$,

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$



をとる。つまり

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 3，$\theta=\pi$ のとき最小値 0

(2)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$y=-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=\cos^2\theta-\cos\theta-1$

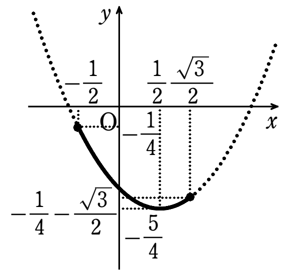
$\cos\theta=x$ とおくと，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ であるから　　$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

y を x の式で表すと

$y=x^2-x-1$

$=\left\{x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



① の範囲において，y は

$x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

をとる。

また，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ であるから

$x=-\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

$x=\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{\pi}{3}$

のときである。

よって，　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$