数学演習(和積の公式)R１．７．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．(1)　積 ⟶ 和，和 ⟶ 積の公式を用いて，次の値を求めよ。

(ア)　$\sin 75^\circ \cos 15^\circ$　　(イ)　$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$　　(ウ)　$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

(2)　△ABC において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

２．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

３．$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，次の方程式を解け。

$$\cos\theta + \sqrt{3}\cos 4\theta + \cos 7\theta = 0$$

4. (1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

(2) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。不等式 $0 < \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta < 1$ を解け。

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin x\cos x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \dfrac{3}{4}$ を解け。

5. $\triangle$ABC において，次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つ条件を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1 - \sin\dfrac{C}{2}\right)$

(2) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$

6. 平面上の点 O を中心とし，半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある。$\triangle$ABC の内接円の半径 r は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

1．(1)　積 ⟶ 和，和 ⟶ 積の公式を用いて，次の値を求めよ。

（ア）$\sin 75^\circ \cos 15^\circ$　（イ）$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$　（ウ）$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

(2)　△ABC において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

解答　(1)（ア）$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　（イ）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（ウ）$\frac{1}{8}$　(2) 略

解説

(1)（ア）$\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)\}$

$= \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

（イ）$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

（ウ）$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2}\{\cos 60^\circ + \cos(-20^\circ)\}\cos 80^\circ$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos 20^\circ\right)\cos 80^\circ = \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos 100^\circ + \cos(-60^\circ)\}$

$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos 100^\circ + \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos(180^\circ - 80^\circ) + \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ - \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

(2)　$A+B+C=\pi$ から　$C=\pi-(A+B)$

ゆえに　$\sin C = \sin(A+B)$，$\cos\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{A+B}{2}$

よって　$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin 2\cdot\frac{A+B}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

解答　$\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

解説

与式から　$(\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \sin 3\theta = 0$

ここで　$\sin 2\theta + \sin 4\theta = 2\sin\frac{2\theta+4\theta}{2}\cos\frac{2\theta-4\theta}{2} = 2\sin 3\theta\cos(-\theta)$

$= 2\sin 3\theta \cos\theta$

よって　$2\sin 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta = 0$

すなわち　$\sin 3\theta(2\cos\theta+1)=0$

したがって　$\sin 3\theta = 0$　または　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから　$0 \leqq 3\theta \leqq 3\pi$

この範囲で $\sin 3\theta = 0$ を解くと　$3\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって　$\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ を解くと　$\theta = \frac{2}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

3．$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，次の方程式を解け。

$$\cos\theta + \sqrt{3}\cos 4\theta + \cos 7\theta = 0$$

解答　$\theta = \frac{\pi}{8},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{7}{18}\pi$

解説

$\cos\theta + \sqrt{3}\cos 4\theta + \cos 7\theta = (\cos 7\theta + \cos\theta) + \sqrt{3}\cos 4\theta$

$= 2\cos 4\theta\cos 3\theta + \sqrt{3}\cos 4\theta$

$= \cos 4\theta(2\cos 3\theta + \sqrt{3})$

であるから，方程式は　$\cos 4\theta(2\cos 3\theta + \sqrt{3}) = 0$

ゆえに　$\cos 4\theta = 0$　または　$\cos 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leqq 4\theta \leqq 2\pi$ であるから，この範囲で $\cos 4\theta = 0$ を解くと

$4\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta = \frac{\pi}{8},\ \frac{3}{8}\pi$

また，$0 \leqq 3\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ であるから，この範囲で $\cos 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$3\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$　すなわち　$\theta = \frac{5}{18}\pi,\ \frac{7}{18}\pi$

よって，求める解は　$\theta = \frac{\pi}{8},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{7}{18}\pi$

4．(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

(2)　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。不等式 $0 < \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta < 1$ を解け。

(3)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin x\cos x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{3}{4}$ を解け。

解答　(1)　$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{2}{3}\pi$　(2)　$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$　(3)　$x = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

解説

(1)　P=(左辺)−(右辺)

$= (\sin x - \cos x) + (\sin 2x - \cos 2x) + (\sin 3x - \cos 3x)$

$= \sqrt{2}\left\{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

ここで，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$ であるから

$P = \sqrt{2}(2\cos x + 1)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

したがって，方程式は　$(2\cos x + 1)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

ゆえに　$\cos x = -\frac{1}{2}$　…… ①　または　$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$　…… ②

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，① を解くと　$x = \frac{2}{3}\pi$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ から　$-\frac{\pi}{4} \leqq 2x - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi$

この範囲で ② を解くと　$2x - \frac{\pi}{4} = 0,\ \pi$

よって　$2x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$　すなわち　$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi$

したがって，求める解は　$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{2}{3}\pi$

(2)　$\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$

よって，不等式は　$0 < \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} < 1$

すなわち　$-\frac{1}{2} < \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$

$2\theta + \frac{\pi}{6} = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき　$\frac{\pi}{6} \leqq t < \pi + \frac{\pi}{6}$

この範囲で $-\frac{1}{2} < \sin t < \frac{1}{2}$ を解くと　$\frac{5}{6}\pi < t < \frac{7}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{5}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$　すなわち　$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$

(3)　$t = \sin x + \cos x$ とおき，両辺を 2 乗すると

$t^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

よって　$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

ゆえに，方程式は　$\frac{t^2-1}{2} + \sqrt{2}t - \frac{3}{4} = 0$

整理すると　$2t^2 + 4\sqrt{2}t - 5 = 0$　ゆえに　$(\sqrt{2}t-1)(\sqrt{2}t+5) = 0$

したがって　$t = \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{5}{\sqrt{2}}$　…… ①

ここで　$t = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ …… ② であるから　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

よって，① のうち適するものは　$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$　よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

② から　$x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$　ゆえに　$x = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

5．△ABC において，次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つ条件を求めよ。

(1)　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\leqq\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)$　　(2)　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$

解答　(1)　証明略，$A=B$　　(2)　証明略，$A=B=C=\frac{\pi}{3}$

解説

$A+B+C=\pi$ であるから　　$C=\pi-(A+B)$

(1)　(左辺)$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)$

ここで　　$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

よって　　(右辺)$-$(左辺)$=\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)-\left\{-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A-B}{2}\right)\geqq 0$

$\left(-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}\right.$ より，$0<\cos\frac{A-B}{2}\leqq 1$ であるから。$\left.\right)$

ここで，$1-\cos\frac{A-B}{2}=0$ とすると　　$\frac{A-B}{2}=0$

ゆえに，等号は $A=B$ のとき成り立つ。

(2)　$\sin\frac{C}{2}=t$ とおくと，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$0<t<1$

(1) から　　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$

$=\frac{1}{2}t(1-t)=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$

$0<t<1$ の範囲において，$t=\frac{1}{2}$　すなわち　$C=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{1}{8}$ をとるから

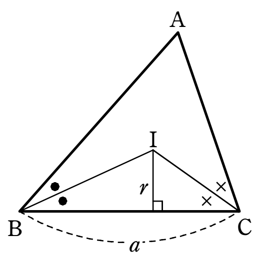
$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$

等号は，$A=B$ かつ $C=\frac{\pi}{3}$　すなわち　$A=B=C=\frac{\pi}{3}$ のとき成り立つ。

6．平面上の点 O を中心とし，半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある。△ABC の内接円の半径 r は $\frac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

解答　略

解説



△ABC の内心を I とすると　　$r=\mathrm{IC}\sin\frac{C}{2}$　……①

△IBC において，正弦定理により

$\frac{\mathrm{IC}}{\sin\angle\mathrm{IBC}}=\frac{a}{\sin\angle\mathrm{BIC}}$

よって　　$\mathrm{IC}\sin\angle\mathrm{BIC}=a\sin\angle\mathrm{IBC}$

これに $\angle\mathrm{BIC}=\pi-\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$，$\angle\mathrm{IBC}=\frac{B}{2}$，

$a=2\sin A=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ を代入すると

$\mathrm{IC}\cos\frac{A}{2}=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$\cos\frac{A}{2}>0$ であるから　　$\mathrm{IC}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

よって，① から　　$r=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A+2B}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$

$\sin\frac{A+2B}{2}\leqq 1$ であるから　　$r\leqq 2\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)=-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$0<\sin\frac{A}{2}<1$ であるから　　$r\leqq\frac{1}{2}$