数学演習(加法定理の応用)R１．７．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．(1)　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

(2)　$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ $(t\neq\pm1)$

２．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2\theta=\cos\theta$　　(2)　$\cos 2\theta-3\cos\theta+2\geqq 0$

３．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2\theta-\sqrt{2}\sin\theta=0$　　(2)　$\cos 2\theta+\cos\theta+1=0$

(3)　$\cos 2\theta-\sin\theta\leqq 0$

４．半径１の円に内接する正五角形 ABCDE の１辺の長さを a とし，$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ とする。

(1)　等式 $\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\cos\theta$ の値を求めよ。　　(3)　a の値を求めよ。

(4)　線分 AC の長さを求めよ。

５．(1)　$\theta=36^\circ$ のとき，$\sin 3\theta=\sin 2\theta$ が成り立つことを示し，$\cos 36^\circ$ の値を求めよ。

(2)　$\theta=18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ が成り立つことを示し，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

６．$0<2x<\dfrac{\pi}{4}$，$\sin 4x=\dfrac{24}{25}$ のとき，$\sin 2x+\cos 2x$，$\sin 2x$，$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ の値を求めよ。

７．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\sin 2\theta-\cos\theta>0$ を解け。

８．$\tan 1^\circ$ は有理数か。

数学演習(加法定理の応用)R１．７．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．(1) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき，$\cos2\theta$，$\sin2\theta$，$\tan\frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

(2) $t=\tan\frac{\theta}{2}$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}\ (t\neq\pm1)$$

解答　(1) $\cos2\theta=\frac{7}{25}$，$\sin2\theta=-\frac{24}{25}$，$\tan\frac{\theta}{2}=3$　(2) 略

解説

(1) $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

ゆえに　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\tan\frac{\theta}{2}>0$

よって　$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{5+4}{5-4}}=3$

(2) $\tan\theta=\tan2\cdot\frac{\theta}{2}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$　$(t\neq\pm1)$

$1+\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ から　$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+t^2}$

よって　$\cos\theta=\cos2\cdot\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

ゆえに　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$

2．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin2\theta=\cos\theta$　(2) $\cos2\theta-3\cos\theta+2\geqq0$

解答　(1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$　(2) $\theta=0,\ \frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

解説

(1) 方程式から　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\cos\theta=0,\ \sin\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta=0$ より　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

以上から，解は　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2) 不等式から　$2\cos^2\theta-1-3\cos\theta+2\geqq0$

整理すると　$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1\geqq0$

ゆえに　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)\geqq0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では，$\cos\theta-1\leqq0$ であるから　$\cos\theta-1=0,\ 2\cos\theta-1\leqq0$

よって　$\cos\theta=1,\ \cos\theta\leqq\frac{1}{2}$

したがって，解は　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

3．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin2\theta-\sqrt{2}\sin\theta=0$　(2) $\cos2\theta+\cos\theta+1=0$

(3) $\cos2\theta-\sin\theta\leqq0$

解答　(1) $\theta=0,\ \frac{\pi}{4},\ \pi,\ \frac{7}{4}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(3) $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi$

解説

(1) 方程式から　$2\sin\theta\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta=0$

ゆえに　$\sin\theta(2\cos\theta-\sqrt{2})=0$

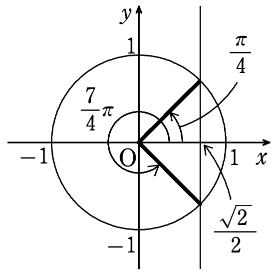
よって　$\sin\theta=0,\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=0$ より　$\theta=0,\ \pi$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

以上から，解は　$\theta=0,\ \frac{\pi}{4},\ \pi,\ \frac{7}{4}\pi$



［$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の参考図］

(2) 方程式から　$2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=0$

ゆえに　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

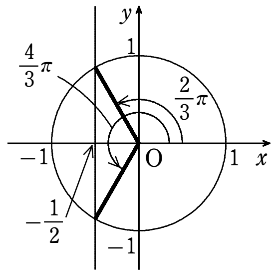
よって　$\cos\theta=0,\ -\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=0$ より　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

以上から，解は　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$



［$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ の参考図］

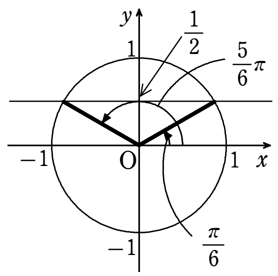
(3) 不等式から　$(1-2\sin^2\theta)-\sin\theta\leqq0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq0$

ゆえに　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)\geqq0$

よって　$\sin\theta\leqq-1,\ \frac{1}{2}\leqq\sin\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi$



［$\frac{1}{2}\leqq\sin\theta$ の参考図］

4．半径1の円に内接する正五角形ABCDE の1辺の長さを a とし，$\theta=\frac{2}{5}\pi$ とする。

(1) 等式 $\sin3\theta+\sin2\theta=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\cos\theta$ の値を求めよ。　(3) a の値を求めよ。

(4) 線分 AC の長さを求めよ。

解答　(1) 略　(2) $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$　(3) $a=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

(4) $\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

解説

(1) $\theta=\frac{2}{5}\pi$ から　$5\theta=2\pi$　よって　$3\theta=2\pi-2\theta$

このとき　$\sin3\theta=\sin(2\pi-2\theta)=-\sin2\theta$

したがって　$\sin3\theta+\sin2\theta=0$

(2) (1)の等式から　$3\sin\theta-4\sin^3\theta+2\sin\theta\cos\theta=0$

$\sin\theta\neq0$ であるから，両辺を $\sin\theta$ で割って　$3-4\sin^2\theta+2\cos\theta=0$

ゆえに　$3-4(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta=0$

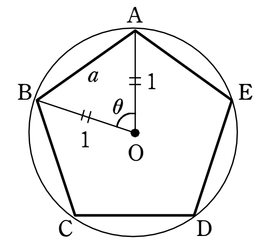
整理して　$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$

$0<\cos\theta<1$ であるから　$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3) 円の中心を O とすると，△OAB において，余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$$
$$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$a>0$ であるから　$a=\mathrm{AB}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

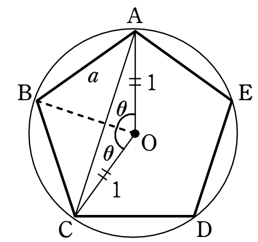


(4) △OAC において，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cos2\theta$$
$$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos2\theta=2-2(2\cos^2\theta-1)$$
$$=4-4\cos^2\theta=4-(1-2\cos\theta)=3+2\cos\theta$$

AC>0 であるから

$$\mathrm{AC}=\sqrt{3+2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$



5．(1)　$\theta=36^\circ$ のとき，$\sin 3\theta=\sin 2\theta$ が成り立つことを示し，$\cos 36^\circ$ の値を求めよ。
(2)　$\theta=18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ が成り立つことを示し，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

解答　(1)　証明略，$\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　　(2)　証明略，$\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解説
(1)　示すべき等式は，$\sin 108^\circ=\sin 72^\circ$ …… ① である。
① について　　(左辺)$=\sin(180^\circ-72^\circ)=\sin 72^\circ=$(右辺)
よって，① すなわち $\sin 3\theta=\sin 2\theta$ が成り立つ。
この等式から　　$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$
$\sin\theta=\sin 36^\circ\neq 0$ であるから，両辺を $\sin\theta$ で割って
$$3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$$
ゆえに　　$3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$
整理して　　$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$
よって　　$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$
$0<\cos 36^\circ<1$ であるから　　$\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

(2)　示すべき等式は，$\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ …… ① である。
① について　　(左辺)$=\sin(90^\circ-54^\circ)=\cos 54^\circ=$(右辺)
よって，① すなわち $\sin 2\theta=\cos 3\theta$ が成り立つ。
この等式から　　$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$
$\cos\theta=\cos 18^\circ\neq 0$ であるから，両辺を $\cos\theta$ で割って
$$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$$
よって　　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$
整理して　　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$
これを $\sin\theta$ について解くと　　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$
$0<\sin 18^\circ<1$ であるから　　$\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

6．$0<2x<\dfrac{\pi}{4}$，$\sin 4x=\dfrac{24}{25}$ のとき，$\sin 2x+\cos 2x$，$\sin 2x$，$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ の値を求めよ。

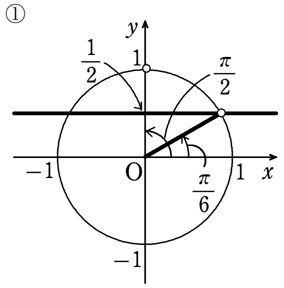
解答　$\sin 2x+\cos 2x=\dfrac{7}{5}$，$\sin 2x=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{82}{9}$

解説
$\sin 4x=\dfrac{24}{25}$ から　　$2\sin 2x\cos 2x=\dfrac{24}{25}$
ゆえに　　$\sin 2x\cos 2x=\dfrac{12}{25}$
このとき　　$(\sin 2x+\cos 2x)^2=1+2\sin 2x\cos 2x=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}$
$0<2x<\dfrac{\pi}{4}$ であるから　　$\sin 2x+\cos 2x>0$
よって　　$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{\dfrac{49}{25}}=\dfrac{7}{5}$
したがって，$\sin 2x$，$\cos 2x$ は 2 次方程式 $t^2-\dfrac{7}{5}t+\dfrac{12}{25}=0$ すなわち $25t^2-35t+12=0$ の 2 つの解である。
この方程式を解くと，$(5t-3)(5t-4)=0$ から　　$t=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$
$0<2x<\dfrac{\pi}{4}$ であるから　　$\sin 2x<\cos 2x$
よって　　$\sin 2x=\dfrac{3}{5}$，$\cos 2x=\dfrac{4}{5}$
次に，$\cos 2x=\dfrac{4}{5}$ から　　$2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\dfrac{4}{5}$
ゆえに　　$\cos^2 x=\dfrac{9}{10}$，$\sin^2 x=\dfrac{1}{10}$
よって　　$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{9}+9=\dfrac{82}{9}$

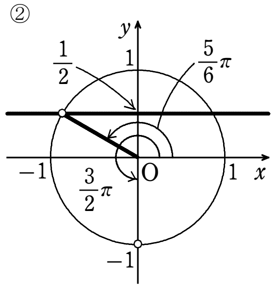
7．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\sin 2\theta-\cos\theta>0$ を解け。

解答　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

解説
不等式から　　$2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta>0$
ゆえに　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)>0$
したがって
$\begin{cases}\cos\theta>0\\ \sin\theta>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ …… ①　または　$\begin{cases}\cos\theta<0\\ \sin\theta<\dfrac{1}{2}\end{cases}$ …… ②

①


$0\leqq\theta<2\pi$ であるから
$\cos\theta>0$ より　　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$
$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$ より　　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$
① の解は，共通範囲をとって　　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　…… ③

②


$\cos\theta<0$ より　　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$
$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$ より　　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$
② の解は，共通範囲をとって　　$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　…… ④
求める解は，③，④ の範囲を合わせて
$$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2},\quad \frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$$

8．$\tan 1^\circ$ は有理数か。

解答　有理数ではない

解説
$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，2 倍角の公式
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
を繰り返し用いることにより，
$$\tan 2^\circ,\ \tan 4^\circ,\ \tan 8^\circ,\ \tan 16^\circ,\ \tan 32^\circ,\ \tan 64^\circ$$
はすべて有理数となる。
よって，$\tan 60^\circ=\tan(64^\circ-4^\circ)=\dfrac{\tan 64^\circ-\tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ\tan 4^\circ}$ であるから，$\tan 60^\circ$ は有理数となる。
一方，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であり，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，矛盾が生じる。
したがって，$\tan 1^\circ$ は有理数ではない。