数学演習(三角方程式･不等式･最大最小)R１.７.１５　　(　)組(　)番　名前(　)

$\boxed{1}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。また，その一般解を求めよ。

(1) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$　(2) $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan\theta=-\sqrt{3}$

$\boxed{2}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\tan\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{3}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{2}\cos\theta>-1$　(2) $\frac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan\theta\leqq\sqrt{3}$

$\boxed{4}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$　(2) $2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq-1$

$\boxed{5}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta+\sin\theta-1=0$　(2) $2\sin^2\theta+5\cos\theta-4>0$

$\boxed{6}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$　(2) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$　(3) $\sqrt{2}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)>1$

$\boxed{7}$ 関数 $y=4\sin^2\theta-4\cos\theta+1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ $y=\cos^2\theta+a\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ の最大値を a の式で表せ。

$\boxed{9}$ θ の方程式 $\sin^2\theta+a\cos\theta-2a-1=0$ を満たす θ があるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ a は定数とする。θ に関する方程式 $\sin^2\theta-\cos\theta+a=0$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

$\boxed{11}$ a を実数とする。方程式 $\cos^2x-2a\sin x-a+3=0$ の解で $0\leqq x<2\pi$ の範囲にあるものの個数を求めよ。

数学演習(三角方程式･不等式･最大最小)R１.７.１５　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。また，その一般解を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

解答 (1) $\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$；一般解は $\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$（$n$ は整数）

(2) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$；一般解は $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$（$n$ は整数）

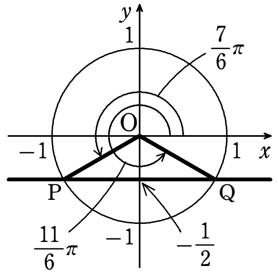
(3) $\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$；一般解は $\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi$（$n$ は整数）

解説

(1) 直線 $y = -\frac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ では　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

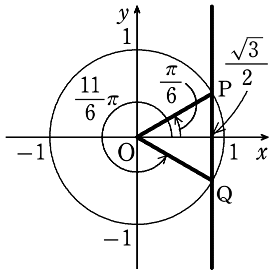
一般解は　$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$（$n$ は整数）



(2) 直線 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ では　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

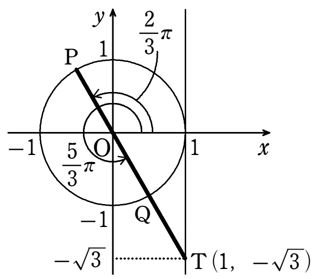
一般解は　$\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$（$n$ は整数）



(3) 直線 $x = 1$ 上で $y = -\sqrt{3}$ となる点を Tとする。直線 OTと単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ では　$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

一般解は　$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi$（$n$ は整数）



2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\tan\theta \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$

解答 (1) $\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$　(2) $\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{4}\pi$

(3) $\frac{\pi}{6} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$

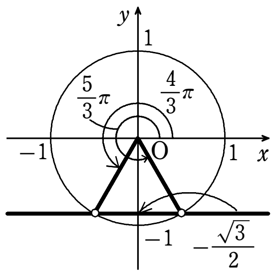
解説

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす

θ の値は　$\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

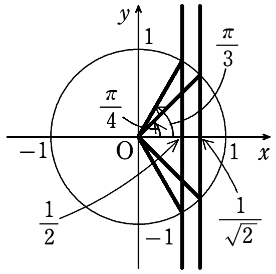


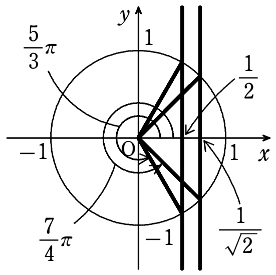
(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす

θ の値は　$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{4}\pi$



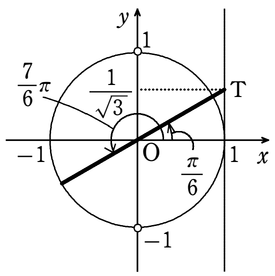


(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす

θ の値は　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$



3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{2}\cos\theta > -1$　　(2) $\frac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$

解答 (1) $0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$　(2) $\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$

(3) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

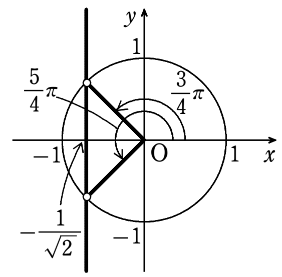
解説

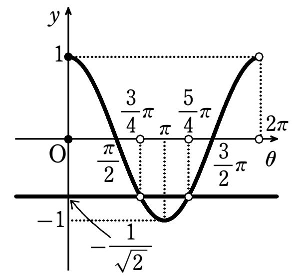
(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$



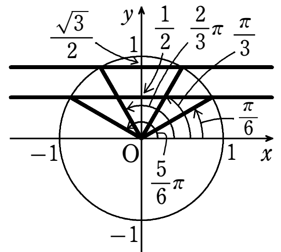


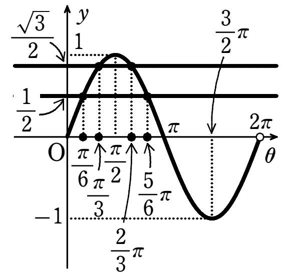
(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$





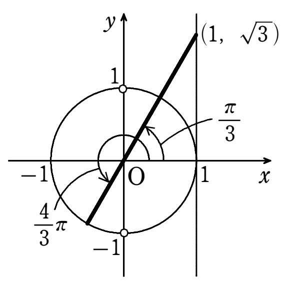
(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ の値は

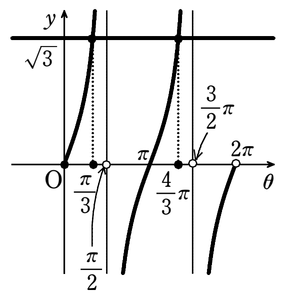
$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi,$

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$





4 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$　　(2) $2\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leqq -1$

解答 (1) $\theta = \frac{\pi}{12},\ \frac{7}{12}\pi$　(2) $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

解説

(1) $\theta + \frac{\pi}{6} = t$ ……① とおく。

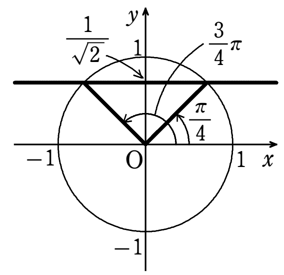
$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$　すなわち　$\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{13}{6}\pi$

この範囲で $\sqrt{2}\sin t = 1$ すなわち $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

を解くと　$t = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$ …… ②

① から　$\theta = t - \frac{\pi}{6}$　② を代入して　$\theta = \frac{\pi}{12},\ \frac{7}{12}\pi$



(2) $2\theta-\frac{\pi}{3}=t$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$-\frac{\pi}{3}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{3}$ すなわち $-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{11}{3}\pi$

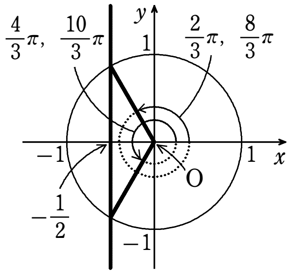
この範囲で $2\cos t\leqq -1$ すなわち $\cos t\leqq -\frac{1}{2}$

を解くと　$\frac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi\leqq t\leqq\frac{10}{3}\pi$

よって　$\frac{2}{3}\pi\leqq 2\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi\leqq 2\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{10}{3}\pi$

ゆえに　$\pi\leqq 2\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$, $3\pi\leqq 2\theta\leqq\frac{11}{3}\pi$

よって　$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$



5 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta+\sin\theta-1=0$　　(2) $2\sin^2\theta+5\cos\theta-4>0$

解答　(1) $\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　　(2) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1) 方程式から　$2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1=0$

整理すると　$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$

ゆえに　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$

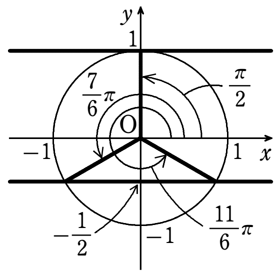
よって　$\sin\theta=1,\ -\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=1$ より　$\theta=\frac{\pi}{2}$

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$



(2) 不等式から　$2(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta-4>0$

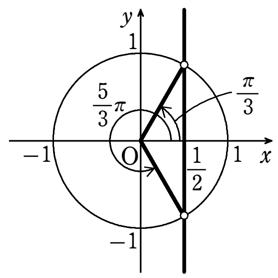
整理すると　$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2<0$

よって　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)<0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，常に $\cos\theta-2<0$ である。

したがって　$2\cos\theta-1>0$　すなわち　$\cos\theta>\frac{1}{2}$

これを解いて　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$



6 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$　(2) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$　(3) $\sqrt{2}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)>1$

解答　(1) $\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$　　(2) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

(3) $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1) $\theta+\frac{\pi}{4}=t$ …… ① とおく。$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

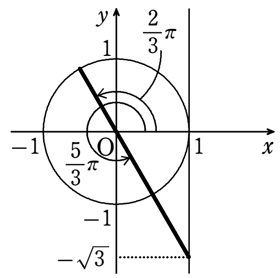
$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{9}{4}\pi$

この範囲で $\tan t=-\sqrt{3}$ を解くと

$t=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　…… ②

① から　$\theta=t-\frac{\pi}{4}$

② を代入して　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$



(2) $\theta-\frac{\pi}{3}=t$ とおく。$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

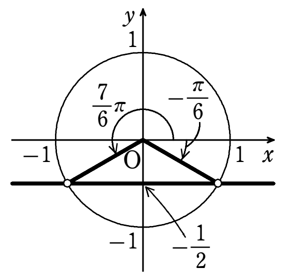
$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{5}{3}\pi$

この範囲で $\sin t<-\frac{1}{2}$ を解くと

$-\frac{\pi}{3}\leqq t<-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi<t<\frac{5}{3}\pi$

ゆえに　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

よって　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$



(3) $2\theta+\frac{\pi}{4}=t$ とおく。$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

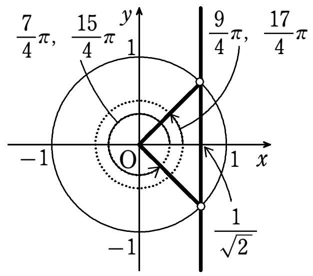
$\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{4}<4\pi+\frac{\pi}{4}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{17}{4}\pi$

この範囲で $\sqrt{2}\cos t>1$ すなわち $\cos t>\frac{1}{\sqrt{2}}$ を

解くと　$\frac{7}{4}\pi<t<\frac{9}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi<t<\frac{17}{4}\pi$

ゆえに　$\frac{7}{4}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$

よって　$\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$



7 関数 $y=4\sin^2\theta-4\cos\theta+1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき最大値 6；$\theta=0$ のとき最小値 -3

解説

$y=4\sin^2\theta-4\cos\theta+1=4(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta+1$

$=-4\cos^2\theta-4\cos\theta+5$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-1\leqq t\leqq1$　…… ①

y を t の式で表すと

$y=-4t^2-4t+5=-4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+6$

① の範囲において，y は

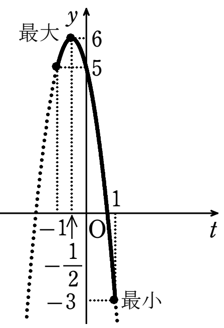
$t=-\frac{1}{2}$ で最大値 6，$t=1$ で最小値 -3

をとる。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=-\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ から　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$t=1$ となるのは，$\cos\theta=1$ から　$\theta=0$



したがって　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき最大値 6；$\theta=0$ のとき最小値 -3

8 $y=\cos^2\theta+a\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ の最大値を a の式で表せ。

解答　$a<-\sqrt{3}$ のとき $-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{4}$，$-\sqrt{3}\leqq a<\sqrt{2}$ のとき $\frac{a^2}{4}+1$，

$\sqrt{2}\leqq a$ のとき $\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}$

解説

$y=\cos^2\theta+a\sin\theta=(1-\sin^2\theta)+a\sin\theta$

$=-\sin^2\theta+a\sin\theta+1$

$\sin\theta=x$ とおくと　$y=-x^2+ax+1$

$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x)=-x^2+ax+1$ とすると　$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+1$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$ である。

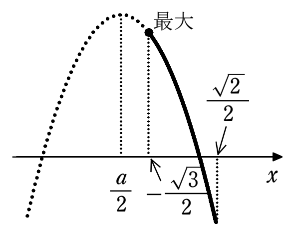
[1] $\frac{a}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$　すなわち　$a<-\sqrt{3}$ のとき

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最大となり，その最大値は

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{4}$

[1]



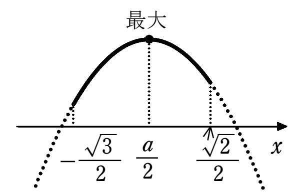
[2] $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$　すなわち

$-\sqrt{3}\leqq a<\sqrt{2}$ のとき

$x=\frac{a}{2}$ で最大となり，その最大値は

$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+1$

[2]

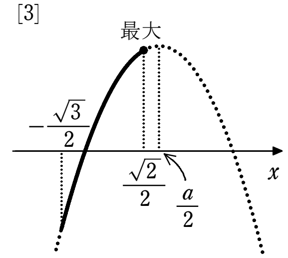


[3] $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\frac{a}{2}$　すなわち　$\sqrt{2}\leqq a$ のとき

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最大となり，その最大値は

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}$

[3]



[1]～[3] から

$a<-\sqrt{3}$ のとき $-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{4}$,

$-\sqrt{3}\leqq a<\sqrt{2}$ のとき $\frac{a^2}{4}+1$,

$\sqrt{2}\leqq a$ のとき $\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}$

9 θ の方程式 $\sin^2\theta+a\cos\theta-2a-1=0$ を満たす θ があるような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $-1\leqq a\leqq 0$

解説

$\cos\theta=x$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 1$ であり，方程式は

$(1-x^2)+ax-2a-1=0$　すなわち　$x^2-ax+2a=0$　…… ①

この左辺を $f(x)$ とすると，求める条件は，方程式 $f(x)=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつことである。

これは，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点について，次の [1] または [2] または [3] が成り立つことと同じである。

[1]　放物線 $y=f(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で，x 軸と異なる 2 点で交わる，または接する。

このための条件は，① の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

$D=(-a)^2-4\cdot 2a=a(a-8)$ であるから　$a(a-8)\geqq 0$

よって　$a\leqq 0,\ 8\leqq a$　…… ②

軸 $x=\dfrac{a}{2}$ について　$-1<\dfrac{a}{2}<1$ から　$-2<a<2$　…… ③

$f(-1)=1+3a>0$ から　$a>-\dfrac{1}{3}$　…… ④

$f(1)=1+a>0$　から　$a>-1$　…… ⑤

② ～ ⑤ の共通範囲を求めて　$-\dfrac{1}{3}<a\leqq 0$

[2]　放物線 $y=f(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で，x 軸とただ 1 点で交わり，他の 1 点は $x<-1,\ 1<x$ の範囲にある。

このための条件は　$f(-1)f(1)<0$

ゆえに　$(3a+1)(a+1)<0$　よって　$-1<a<-\dfrac{1}{3}$

[3]　放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $x=-1$ または $x=1$ で交わる。

$f(-1)=0$ または $f(1)=0$ から　$a=-\dfrac{1}{3}$ または $a=-1$

[1]，[2]，[3] を合わせて　$-1\leqq a\leqq 0$

10 a は定数とする。θ に関する方程式 $\sin^2\theta-\cos\theta+a=0$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。

(2)　この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

解答 (1)　$-\dfrac{5}{4}\leqq a\leqq 1$

(2)　$a<-\dfrac{5}{4},\ 1<a$ のとき 0 個；$a=-\dfrac{5}{4}$ のとき 2 個；

$-\dfrac{5}{4}<a<-1$ のとき 4 個；$a=-1$ のとき 3 個；$-1<a<1$ のとき 2 個；

$a=1$ のとき 1 個

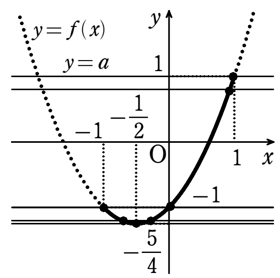
解説

$\cos\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq x\leqq 1$

方程式は　$(1-x^2)-x+a=0$　したがって　$x^2+x-1=a$

$f(x)=x^2+x-1$ とすると　$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

(1)　求める条件は，$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつ条件と同じである。

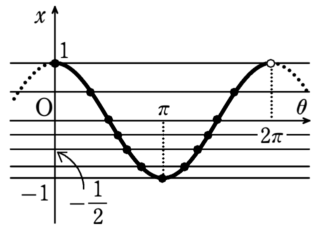


よって，右の図から　$-\dfrac{5}{4}\leqq a\leqq 1$

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点を考えて，求める解 θ の個数は次のようになる。

[1]　$a<-\dfrac{5}{4},\ 1<a$ のとき

共有点はないから　0 個



[2]　$a=-\dfrac{5}{4}$ のとき，$x=-\dfrac{1}{2}$ から　2 個

[3]　$-\dfrac{5}{4}<a<-1$ のとき

$-1<x<-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}<x<0$ の範囲に共有点は

それぞれ 1 個ずつあるから　4 個

[4]　$a=-1$ のとき，$x=-1,\ 0$ から　3 個

[5]　$-1<a<1$ のとき，$0<x<1$ の範囲に共有点は 1 個あるから　2 個

[6]　$a=1$ のとき，$x=1$ から　1 個

11 a を実数とする。方程式 $\cos^2x-2a\sin x-a+3=0$ の解で $0\leqq x<2\pi$ の範囲にあるものの個数を求めよ。

解答 $a<-3,\ 1<a$ のとき 2 個；$a=-3,\ 1$ のとき 1 個；$-3<a<1$ のとき 0 個

解説

$\cos^2x-2a\sin x-a+3=0$ から　$(1-\sin^2x)-2a\sin x-a+3=0$

よって　$\sin^2x+2a\sin x+a-4=0$　…… ①

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ から $-1\leqq t\leqq 1$ で，① は

$t^2+2at+a-4=0$　…… ②

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲にある方程式 ② の実数解の個数を調べる。

ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\neq\pm 1$ であれば 2 個あり，$t=\pm 1$ であれば 1 個ある。

② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(a-4)=a^2-a+4=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

$D>0$ であるから，② は常に異なる 2 個の実数解をもつ。

また，$f(t)=t^2+2at+a-4$ とすると，$y=f(t)$ のグラフの軸は直線 $t=-a$ である。

[1]　② が $-1<t<1$ の範囲に解を 2 個もつとき

$f(-1)>0,\ f(1)>0$，軸について　$-1<-a<1$

$f(-1)>0$ から　$-a-3>0$　すなわち　$a<-3$

$f(1)>0$ から　$3a-3>0$　すなわち　$a>1$

$a<-3$ かつ $a>1$ を満たす a は存在しないから，② が $-1<t<1$ の範囲に 2 個の解をもつことはない。

[2]　② が $-1<t<1$ の範囲に解を 1 個だけもつとき

$f(-1)f(1)<0$

よって　$(-a-3)(3a-3)<0$　ゆえに　$(a+3)(a-1)>0$

よって　$a<-3,\ 1<a$

このとき，① を満たす x は 2 個存在する。

[3]　② が $t=-1$ を解にもつとき

$f(-1)=0$ から　$-a-3=0$　すなわち　$a=-3$

このとき，② は　$t^2-6t-7=0$　よって，$(t+1)(t-7)=0$ から　$t=-1,\ 7$

すなわち，② の解で $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲にあるものは $t=-1$ のみである。

ゆえに，① を満たす x は 1 個存在する。

[4]　② が $t=1$ を解にもつとき

$f(1)=0$ から　$3a-3=0$　すなわち　$a=1$

このとき，② は　$t^2+2t-3=0$　よって，$(t-1)(t+3)=0$ から　$t=-3,\ 1$

すなわち，② の解で $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲にあるものは $t=1$ のみである。

ゆえに，① を満たす x は 1 個存在する。

以上から　$a<-3,\ 1<a$ のとき　2 個；$a=-3,\ 1$ のとき 1 個；

$-3<a<1$ のとき 0 個