数学演習(三角関数)R１.７.１４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の角の動径を図示せよ。また，第何象限の角か答えよ。

(1) $650°$　(2) $800°$　(3) $-630°$　(4) $-1280°$

$\boxed{2}$ (1) 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ。

(ア) $72°$　(イ) $-320°$　(ウ) $\dfrac{4}{15}\pi$　(エ) $-\dfrac{13}{4}\pi$

(2) 半径 4，中心角 $150°$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ とする。$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=7$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ (1) 等式 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ を証明せよ。

(2) $\cos^2\theta+\sin\theta-\tan\theta(1-\sin\theta)\cos\theta$ を計算せよ。

$\boxed{5}$ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(2) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$

$\boxed{6}$ a を正の定数とし，θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす角とする。2 次方程式 $2x^2-2(2a-1)x-a=0$ の 2 つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるとき，a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

7 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\dfrac{5(\sin^5\theta+\cos^5\theta)}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}-2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$ の値を求めよ。

8 $y=\sin\theta$ のグラフをもとに，次の関数のグラフをかけ。また，その周期をいえ。

(1) $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　(3) $y=\sin\dfrac{\theta}{2}$

9 関数 $y=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

10 (1) 関数 $\sin x$ の増減を考えて，4 つの数 $\sin 0$，$\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$ の大小関係を調べよ。

(2) θ は第 2 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$ であるとする。このとき，3θ は第何象限の角か。

11 (1) 関数 $f(\theta)=2\sin 3\theta+1$ の周期は ア $\boxed{}$ であり，$f(\theta)$ の最大値は イ $\boxed{}$ である。

(2) 関数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$ の周期のうち，正で最小のものを求めよ。

1 次の角の動径を図示せよ。また，第何象限の角か答えよ。

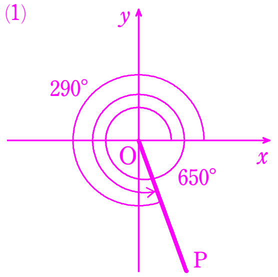
(1) 650°　(2) 800°　(3) $-630°$　(4) $-1280°$

解答 動径を OP とする。

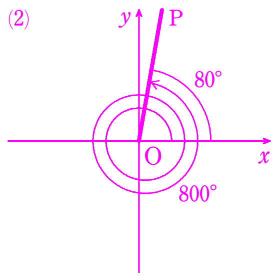
(1) [図] 第 4 象限　(2) [図] 第 1 象限　(3) [図] どの象限の角でもない

(4) [図] 第 2 象限

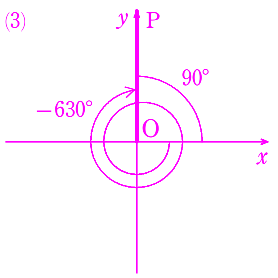
(1)



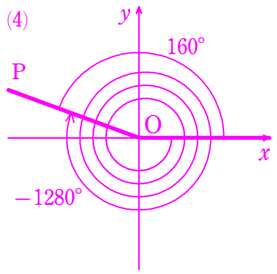
(2)



(3)



(4)



解説

動径を OP とする。

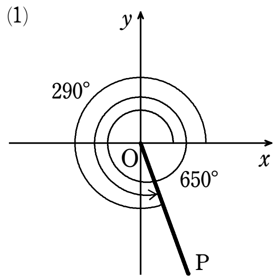
(1) $650°=290°+360°$　[図 (1)]　第 4 象限

(2) $800°=80°+360°\times 2$　[図 (2)]　第 1 象限

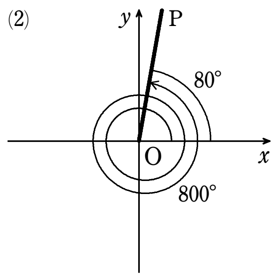
(3) $-630°=90°+360°\times(-2)$　[図 (3)]　どの象限の角でもない

(4) $-1280°=160°+360°\times(-4)$　[図 (4)]　第 2 象限

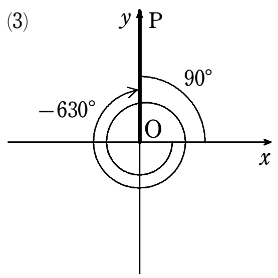
(1)



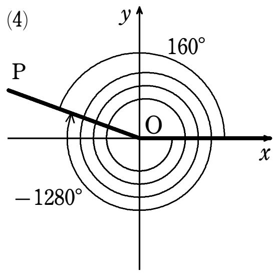
(2)



(3)



(4)



2 (1) 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ。

(ア) 72°　(イ) $-320°$　(ウ) $\frac{4}{15}\pi$　(エ) $-\frac{13}{4}\pi$

(2) 半径 4，中心角 150° の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

解答 (1) (ア) $\frac{2}{5}\pi$　(イ) $-\frac{16}{9}\pi$　(ウ) 48°　(エ) $-585°$

(2) 弧の長さ $\frac{10}{3}\pi$，面積 $\frac{20}{3}\pi$

解説

(1) (ア) $72°=\frac{\pi}{180}\times 72=\frac{2}{5}\pi$

(イ) $-320°=\frac{\pi}{180}\times(-320)=-\frac{16}{9}\pi$

(ウ) $\frac{4}{15}\pi=\frac{4}{15}\times 180°=48°$

(エ) $-\frac{13}{4}\pi=-\frac{13}{4}\times 180°=-585°$

(2) 150° を弧度法で表すと　$150°=\frac{\pi}{180}\times 150=\frac{5}{6}\pi$

よって，弧の長さは　$4\times\frac{5}{6}\pi=\frac{10}{3}\pi$

面積は　$\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{20}{3}\pi$

3 (1) $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ とする。$\cos\theta=\frac{5}{13}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=7$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

解答 (1) $\sin\theta=-\frac{12}{13}$，$\tan\theta=-\frac{12}{5}$

(2) $(\sin\theta,\ \cos\theta)=\left(\frac{7\sqrt{2}}{10},\ \frac{\sqrt{2}}{10}\right),\ \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10},\ -\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$

解説

(1) $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{12}{13}\right)\div\frac{5}{13}=-\frac{12}{5}$

(2) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\cos^2\theta=\frac{1}{1+7^2}=\frac{1}{50}$

ゆえに　$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{50}}=\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$ のとき　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=7\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{10}$ のとき　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=7\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

4 (1) 等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ を証明せよ。

(2) $\cos^2\theta+\sin\theta-\tan\theta(1-\sin\theta)\cos\theta$ を計算せよ。

解答 (1) 略　(2) 1

解説

(1)
$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

したがって　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

(2)
$$\cos^2\theta+\sin\theta-\tan\theta(1-\sin\theta)\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)\cos\theta$$
$$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta(1-\sin\theta)$$
$$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

5 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$

解答 (1) $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{9\sqrt{3}}{16}$　(2) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$

ゆえに　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-1\right)=-\frac{1}{8}$

したがって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

(2) (1) から　$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$
$$=1-2\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}\quad\cdots\cdots ①$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ では，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ であり　$\cos\theta-\sin\theta<0$

よって，① から　$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

6 a を正の定数とし，θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす角とする。2 次方程式 $2x^2-2(2a-1)x-a=0$ の 2 つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるとき，a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

解答 $a=\frac{3}{4}$，$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$，$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$

解説

与えられた 2 次方程式に対し，解と係数の関係から

$$\sin\theta+\cos\theta=2a-1\ \cdots\cdots ①,\qquad \sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{2}\ \cdots\cdots ②$$

① の両辺を 2 乗して　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=(2a-1)^2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$1+2\sin\theta\cos\theta=(2a-1)^2$

これに②を代入して　$1+2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)=4a^2-4a+1$

よって　$4a^2-3a=0$　すなわち　$a(4a-3)=0$

$a>0$ であるから　$a=\frac{3}{4}$

このとき，与えられた 2 次方程式は

$$2x^2-x-\frac{3}{4}=0\quad\text{すなわち}\quad 8x^2-4x-3=0$$

これを解いて　$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$　　また　$\frac{1-\sqrt{7}}{4}<0<\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$\sin\theta\geqq0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4},\quad \cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$\boxed{7}$ $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\frac{5(\sin^5\theta+\cos^5\theta)}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}-2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$ の値を求めよ。

解答　3

解説

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を平方すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

ゆえに　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$
$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$=1^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$$
$$\sin^5\theta+\cos^5\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^3\theta+\cos^3\theta)-(\sin\theta\cos\theta)^2(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=1\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{19\sqrt{2}}{32}$$

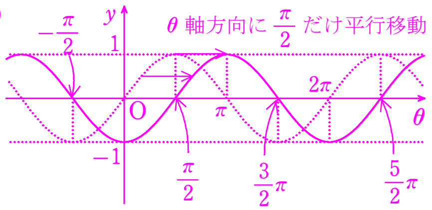
よって　(与式)$=5\cdot\frac{19\sqrt{2}}{32}\div\frac{5\sqrt{2}}{8}-2\cdot\frac{7}{8}=\frac{19}{4}-\frac{7}{4}=3$

$\boxed{8}$ $y=\sin\theta$ のグラフをもとに，次の関数のグラフをかけ。また，その周期をいえ。

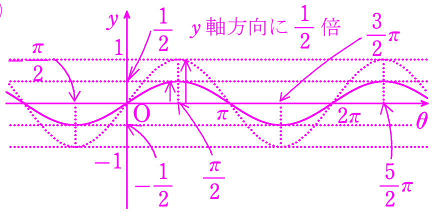
(1)　$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$　　(2)　$y=\frac{1}{2}\sin\theta$　　(3)　$y=\sin\frac{\theta}{2}$

解答　(1)　[図]　2π
(2)　[図]　2π
(3)　[図]　4π

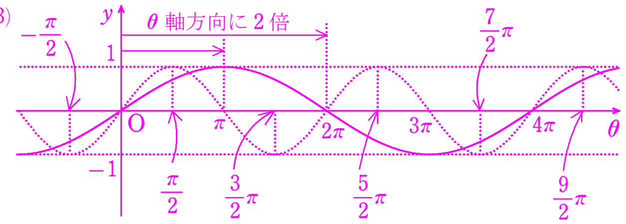
(1)



(2)



(3)

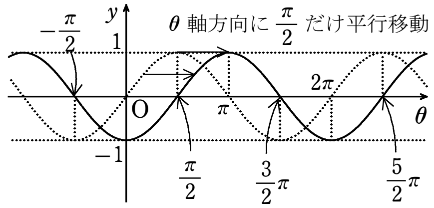


解説

(1)　$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，

$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもので，右の図の実線部分。

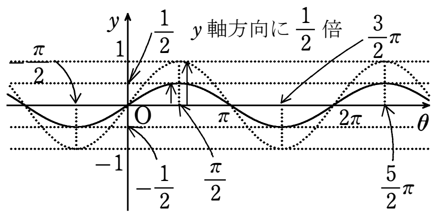
周期は　2π



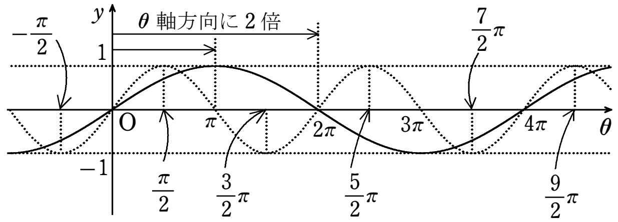
(2)　$y=\frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフは，

$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，右の図の実線部分。

周期は　2π



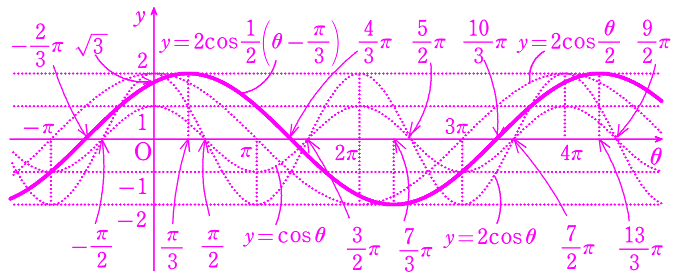
(3)　$y=\sin\frac{\theta}{2}$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 2 倍に拡大したもので，右の図の実線部分。



周期は　$2\pi\div\frac{1}{2}=4\pi$

$\boxed{9}$ 関数 $y=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

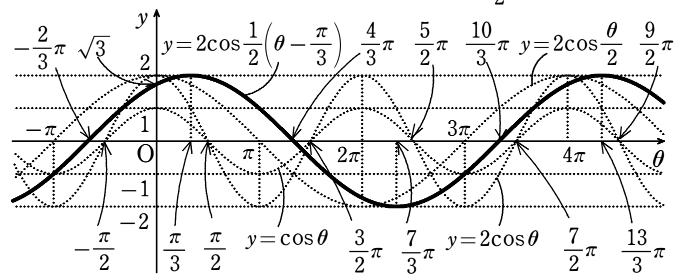
解答　[図]　4π



解説

$$y=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，グラフは下の図の実線部分。周期は　$2\pi\div\frac{1}{2}=4\pi$



$\boxed{10}$ (1)　関数 $\sin x$ の増減を考えて，4 つの数 $\sin 0$，$\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$ の大小関係を調べよ。

(2)　θ は第 2 象限の角で，$\cos\theta=-\frac{3}{4}$ であるとする。このとき，3θ は第何象限の角か。

解答　(1)　$\sin 0<\sin 3<\sin 1<\sin 2$　　(2)　第 1 象限の角

解説

(1)　関数 $\sin x$ は，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で増加，$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で減少する。

$$\sin 0=0$$

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$　であるから　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$ であるから　$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$

$\frac{3}{4}\pi<3<\pi$　であるから　$0<\sin 3<\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\sin 0<\sin 3<\sin 1<\sin 2$

(2)　関数 $\cos x$ は，$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で減少する。

$2\sqrt{2}<3<2\sqrt{3}$ から　$-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{3}{4}<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

すなわち　$\cos\frac{5}{6}\pi<\cos\theta<\cos\frac{3}{4}\pi$

θ は第 2 象限の角であるから　$\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$

よって　$\frac{9}{4}\pi<3\theta<\frac{5}{2}\pi$　　ゆえに　$2\pi<3\theta<\frac{5}{2}\pi$

したがって，3θ は第 1 象限の角である。

$\boxed{11}$ (1)　関数 $f(\theta)=2\sin3\theta+1$ の周期は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，$f(\theta)$ の最大値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　関数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{3}$ の周期のうち，正で最小のものを求めよ。

解答　(1)　(ア)　$\frac{2}{3}\pi$　　(イ)　3　　(2)　12π

解説

(1)　周期は　$\frac{2\pi}{3}={}^{ア}\frac{2}{3}\pi$

また，$-1\leqq\sin3\theta\leqq1$ であるから　$-1\leqq2\sin3\theta+1\leqq3$

よって，$f(\theta)$ の最大値は ${}^{イ}3$

(2)　$\sin\frac{x}{2}$ の周期は　$2\times2\pi=4\pi$　　$\sin\frac{x}{3}$ の周期は　$3\times2\pi=6\pi$

4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，求める周期は　12π