数学演習（三角関数）　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　　　）

１. 次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ。

(1)　半径が 10，中心角が $\dfrac{\pi}{5}$　　(2)　半径が 3，中心角が $15°$

２. 次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{65}{6}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\dfrac{11}{4}\pi\right)$　　(3)　$\tan\dfrac{14}{3}\pi$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

３. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

４. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。また，一般解を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta=-\sqrt{3}$

５. 次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$x-2y+2=0$，$x+3y-3=0$　　(2)　$y=-x$，$y=(2-\sqrt{3})x$

６. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

７. $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

８. 関数 $y=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

9．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$　　　　(2)　$\sin 2\theta > \cos\theta$

10. $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

11. $0 \leqq x < 2\pi$ とする。関数 $y = \cos 2x - 2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

12. $0 \leqq x < 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ を解け。

(2)　関数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

13. θ の関数 $y = \sin 2\theta + \sin\theta + \cos\theta$ について

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて，y を t の関数で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y のとりうる値の範囲を求めよ。

14. $f(\theta) = \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

15. (1)　θ に関する方程式 $4\cos^2\theta + 3a\cos\theta - a^2 = 0$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ で解を 3 個もつための定数 a の条件を求めよ。

(2)　θ に関する方程式 $2\cos^2\theta - \sin\theta - a - 1 = 0$ の解の個数を，定数 a の値の範囲によって調べよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

1．(1)　弧の長さは　$10\cdot\dfrac{\pi}{5}=2\pi$

面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot10^2\cdot\dfrac{\pi}{5}=10\pi$

別解　面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot2\pi=10\pi$

(2)　$15°=\dfrac{\pi}{12}$ であるから

弧の長さは　$3\cdot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$

面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot3^2\cdot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{3}{8}\pi$

別解　面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{8}\pi$

2．(1)　$\sin\dfrac{65}{6}\pi=\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi+10\pi\right)=\sin\dfrac{5}{6}\pi$

$=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(-\dfrac{11}{4}\pi\right)=\cos\dfrac{11}{4}\pi=\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+2\pi\right)=\cos\dfrac{3}{4}\pi$

$=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\dfrac{14}{3}\pi=\tan\left(\dfrac{2}{3}\pi+4\pi\right)=\tan\dfrac{2}{3}\pi$

$=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

$=-\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos\theta-\sin\theta=0$

3．(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\left(\dfrac{1}{9}-1\right)\div2=-\dfrac{4}{9}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$ であるから

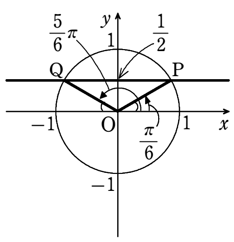
$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{9}\right)\right\}=\dfrac{13}{27}$

別解　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

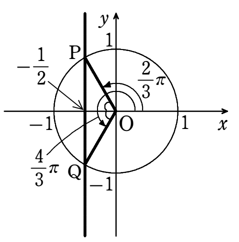
$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-3\left(-\dfrac{4}{9}\right)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{27}$

4．求める θ は，下のそれぞれの図において，動径OP，OQの表す角である。
$0\leqq\theta<2\pi$ における解は

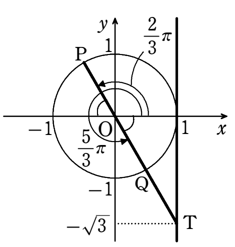
(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$



(2)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$



(3)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$



また，一般解は，n を整数として

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$，$\dfrac{5}{6}\pi+2n\pi$　　(2)　$\theta=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$　　(3)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi+n\pi$

5．(1)　$x-2y+2=0$ から　$y=\dfrac{1}{2}x+1$

$x+3y-3=0$ から　$y=-\dfrac{1}{3}x+1$

2直線は垂直でないから

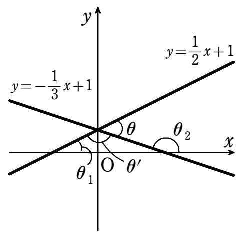
$$\tan\theta=\left|\dfrac{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{1+\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)}\right|=1$$

ゆえに，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

参考　図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2（$0<\theta_1<\pi$，$0<\theta_2<\pi$）とし，$\theta'=\pi-\theta$ とすると

$\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$，$\tan\theta_2=-\dfrac{1}{3}$

$\theta'=\theta_2-\theta_1$



よって

$$\tan\theta'=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\dfrac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}}{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{2}}=-1$$

ゆえに　$\tan\theta=\tan(\pi-\theta')=-\tan\theta'=1$

(2)　2直線は垂直でないから

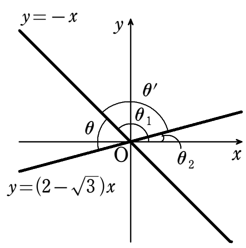
$$\tan\theta=\left|\dfrac{-1-(2-\sqrt{3})}{1+(-1)\cdot(2-\sqrt{3})}\right|=\left|\dfrac{-3+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}\right|=\sqrt{3}$$

ゆえに，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

参考　図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2（$0<\theta_1<\pi$，$0<\theta_2<\pi$）とし，$\theta'=\pi-\theta$ とすると

$\tan\theta_1=-1$，$\tan\theta_2=2-\sqrt{3}$

$\theta'=\theta_1-\theta_2$



よって

$$\tan\theta'=\tan(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\dfrac{-1-(2-\sqrt{3})}{1+(-1)\cdot(2-\sqrt{3})}=-\sqrt{3}$$

ゆえに　$\tan\theta=\tan(\pi-\theta')=-\tan\theta'=\sqrt{3}$

6．$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}<4\pi-\dfrac{\pi}{3}$

(1)　方程式から　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{7}{3}\pi$，$\dfrac{8}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　不等式から

$$-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{3}<4\pi-\dfrac{\pi}{3}$$

ゆえに　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

7．$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\alpha>0$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=0$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{7}{25}$

また　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

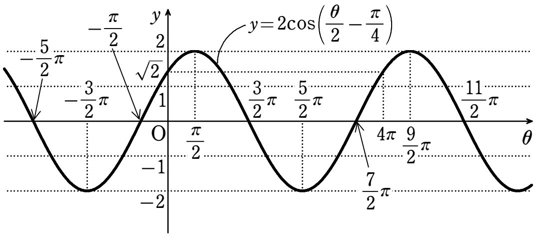
$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{24}{25}$

よって　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$=\left(-\dfrac{24}{25}\right)\div\left(-\dfrac{7}{25}\right)=\dfrac{24}{7}$

8．$y=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ から　$y=2\cos\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

よって，グラフは下図。周期は　$2\pi\div\frac{1}{2}=4\pi$



9．(1)　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$を方程式に代入して整理すると

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

よって　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$

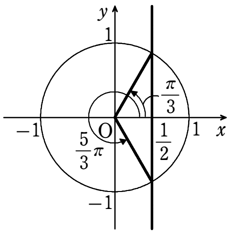
ゆえに　$\cos\theta=1$　または　$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=1$　のとき　$\theta=0$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

よって　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$



(2)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を不等式に代入すると

$2\sin\theta\cos\theta>\cos\theta$

よって　$\cos\theta(2\sin\theta-1)>0$

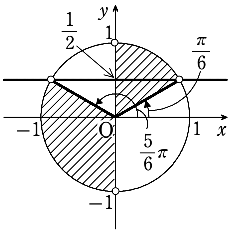
ゆえに　$\cos\theta>0,\ \sin\theta>\frac{1}{2}$

または

$\cos\theta<0,\ \sin\theta<\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$



10．$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

次に　$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\frac{\theta}{2}>0$

よって　$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

また　$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=-3\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+4\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3=-\frac{10\sqrt{2}}{27}$

11．$\cos 2x=2\cos^2x-1$ であるから

$y=(2\cos^2x-1)-2\cos x=2\cos^2x-2\cos x-1$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t で表すと

$y=2t^2-2t-1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，y は

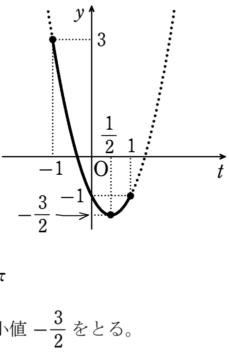
$t=-1$ で最大値 3,

$t=\frac{1}{2}$　で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-1$ となるとき，$\cos x=-1$ から　$x=\pi$

$t=\frac{1}{2}$　となるとき，$\cos x=\frac{1}{2}$　から　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$



よって，この関数は $x=\pi$ で最大値 3，$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

12．(1)　左辺を変形して　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

ゆえに　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$　　よって　$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(2)　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

よって，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ がとる値の範囲は　$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-2\leqq y\leqq 2$

また，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$　のとき，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ から　$x=\frac{7}{6}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2

13．(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗して

$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin 2\theta$

すなわち　$\sin 2\theta=t^2-1$

ゆえに　$y=\sin 2\theta+(\sin\theta+\cos\theta)=(t^2-1)+t$

よって　$y=t^2+t-1$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

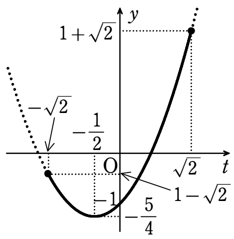
$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　(1) から　$y=t^2+t-1$

$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における，この関数の値域は

$-\frac{5}{4}\leqq y\leqq 1+\sqrt{2}$



14．$f(\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$

$=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}+2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$

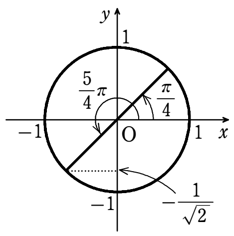
よって　$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに　$1\leqq f(\theta)\leqq\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

したがって，$f(\theta)$ は

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{8}$ で最大値 $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最小値 1 をとる。



15．(1)　与式から　$(\cos\theta+a)(4\cos\theta-a)=0$　　ゆえに　$\cos\theta=-a,\ \frac{a}{4}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta=1$ のとき　$\theta=0$ (ただ 1 つ)

$\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=\pi$ (ただ 1 つ)

$-1<\cos\theta<1$ のとき，θ は 2 つの値をもつ。

よって，$0\leqq\theta<2\pi$ で 3 つの θ の値をもつには，$-a,\ \frac{a}{4}$ のうち，1 つは 1 または -1 であり，もう 1 つは絶対値が 1 より小さい値である。

ゆえに　$-a=1$　または　$-a=-1$

よって　$a=\pm 1$

(2)　$\sin\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq x\leqq 1$　……①

方程式は　$2(1-x^2)-x-a-1=0$　　ゆえに　$-2x^2-x+1=a$

$f(x)=-2x^2-x+1$ とすると　$f(x)=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

$y=f(x)$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べると

$a<-2,\ \frac{9}{8}<a$ のとき　0 個

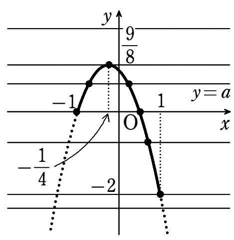
$a=\frac{9}{8},\ -2<a<0$ のとき　$-1<x<1$ の範囲に 1 個

$0<a<\frac{9}{8}$ のとき　$-1<x<1$ の範囲に 2 個

$a=0$ のとき　$-1<x<1$ の範囲に 1 個と，

$x=-1$ のときの 1 個

$a=-2$ のとき　$x=1$ のときの 1 個



$\sin\theta=x$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解の個数は

$x=\pm 1$ のとき　1 個，　$-1<x<1$ のとき　2 個

したがって，求める解の個数は

$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，$-2<a<0$ のとき 2 個，

$a=0$ のとき 3 個，$0<a<\frac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{8}$ のとき 2 個，$\frac{9}{8}<a$ のとき 0 個。