数学演習３（三角関数）　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1. θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\frac{8}{3}\pi$　　(2) $-\frac{9}{4}\pi$

2. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ とする。$\cos\theta=-\frac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

3. 次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{65}{6}\pi$　　(2) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$　　(3) $\tan\frac{14}{3}\pi$

(4) $\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

4. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$　　(2) $2\sin^2\theta+5\cos\theta<4$

5. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin 2\theta>\frac{1}{2}$

6. 次の角の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

(1) 75°　　(2) 15°

7. $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

8. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

9. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$　　(2) $\sin 2\theta>\cos\theta$

10. $0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

11. $0\leqq x<2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ を解け。

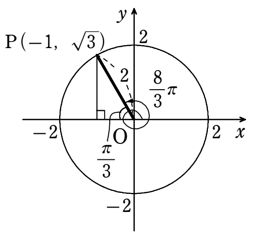
(2) 関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

1. θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\frac{8}{3}\pi$　　　(2) $-\frac{9}{4}\pi$

(1) 右の図で円の半径が $r=2$ のとき，

点Pの座標は　$(-1,\ \sqrt{3})$



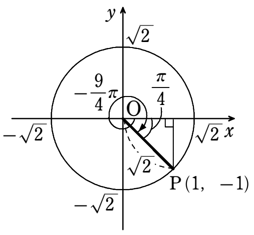
よって　$\sin\frac{8}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{8}{3}\pi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{8}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

(2) 右の図で円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき，

点Pの座標は　$(1,\ -1)$



よって　$\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=\frac{-1}{1}=-1$

2. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ とする。$\cos\theta=-\frac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}$

3. 次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{65}{6}\pi$　　(2) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$　　(3) $\tan\frac{14}{3}\pi$

(4) $\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

(1) $\sin\frac{65}{6}\pi=\sin\left(\frac{5}{6}\pi+10\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)=\cos\frac{11}{4}\pi=\cos\left(\frac{3}{4}\pi+2\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan\frac{14}{3}\pi=\tan\left(\frac{2}{3}\pi+4\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\pi$

$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(4) $\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

$=-\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos\theta-\sin\theta=0$

4. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$　　(2) $2\sin^2\theta+5\cos\theta<4$

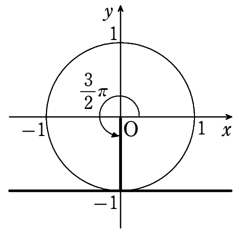
(1) 方程式を変形して　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

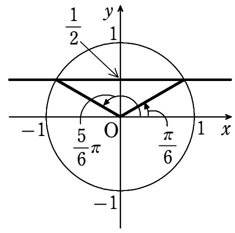
整理すると　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

因数分解して　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=-1,\ \frac{1}{2}$　　$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

[1] $\sin\theta=-1$ のとき　$\theta=\frac{3}{2}\pi$　　[2] $\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$





したがって　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2) 不等式を変形して　$2(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta<4$

整理すると　$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2>0$

因数分解して　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)>0$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから常に　$\cos\theta-2<0$

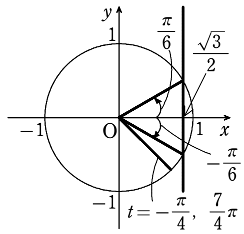
よって　$2\cos\theta-1<0$　　ゆえに　$\cos\theta<\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$

5. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin2\theta>\frac{1}{2}$

(1) $\theta-\frac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$　……①



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<2\pi-\frac{\pi}{4}$

すなわち　$-\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{7}{4}\pi$

この範囲で，① を満たす t の値は　$t=-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}$

よって　$\theta-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi$

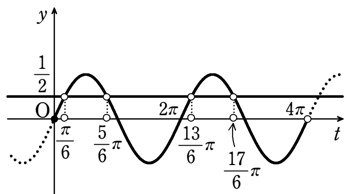
(2) $2\theta=t$ とおくと　$\sin t>\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$0\leqq2\theta<2\cdot2\pi$　すなわち　$0\leqq t<4\pi$

この範囲で，① を満たす t の値の範囲は

$\frac{\pi}{6}<t<\frac{5}{6}\pi,$

$\frac{13}{6}\pi<t<\frac{17}{6}\pi$



よって　$\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5}{6}\pi,$

$\frac{13}{6}\pi<2\theta<\frac{17}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5}{12}\pi,$

$\frac{13}{12}\pi<\theta<\frac{17}{12}\pi$

6. 次の角の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

(1) 75°　　(2) 15°

(1) $\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=2+\sqrt{3}$

(2) $\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan 15°=\tan(45°-30°)=\dfrac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}$

$=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\left(1+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$

7. $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\alpha>0$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　　$\sin\beta>0$

よって　　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=0$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{7}{25}$

また　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{24}{25}$

よって　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$=\left(-\dfrac{24}{25}\right)\div\left(-\dfrac{7}{25}\right)=\dfrac{24}{7}$

8. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　　$\cos\theta<0$

よって　　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

次に　　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{2}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

よって　　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

また　　$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=-3\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)+4\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3=-\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$

9. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$　　　　(2)　$\sin 2\theta>\cos\theta$

(1)　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を方程式に代入して整理すると

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

よって　　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$

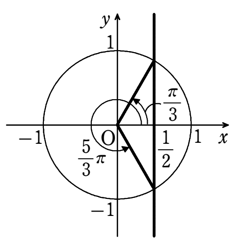
ゆえに　　$\cos\theta=1$　または　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=1$　のとき　　$\theta=0$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　のとき　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって　　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$



(2)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を不等式に代入すると

$2\sin\theta\cos\theta>\cos\theta$

よって　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)>0$

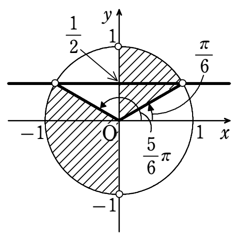
ゆえに　　$\cos\theta>0$，$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$

または

$\cos\theta<0$，$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$



10. $0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$ であるから

$y=(2\cos^2 x-1)-2\cos x=2\cos^2 x-2\cos x-1$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t で表すと

$y=2t^2-2t-1=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，y は

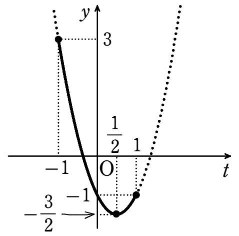
$t=-1$ で最大値 3，

$t=\dfrac{1}{2}$　で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-1$ となるとき，$\cos x=-1$ から　$x=\pi$

$t=\dfrac{1}{2}$　となるとき，$\cos x=\dfrac{1}{2}$　から　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$



よって，この関数は $x=\pi$ で最大値 3，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

11. $0\leqq x<2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ を解け。

(2)　関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

(1)　左辺を変形して　　$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

ゆえに　　$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{9}{4}\pi$　　　よって　　$x=\dfrac{5}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(2)　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

よって，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ がとる値の範囲は　　$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに　　$-2\leqq y\leqq 2$

また，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$　のとき，$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ から　　$x=\dfrac{\pi}{6}$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき，$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$ から　　$x=\dfrac{7}{6}\pi$

よって　　$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 2，$x=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2