数学演習（三角方程式･不等式）Ｈ２４．４．２０

１．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$　(2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

２．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\cos\theta > \frac{1}{2}$　(3) $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$

３．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $2\cos\theta + \sqrt{3} \leqq 0$　(4) $\tan\theta + 1 > 0$

４．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$　(2) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

５．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式･不等式を解け。

(1) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

６．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$(\sin\theta + 3)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$　　(2)　$\cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$

(3)　$(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - \sqrt{2}) > 0$　　(4)　$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) > 0$

７．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta + \cos\theta = 1$　　(2)　$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 1 = 0$

８．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\cos\theta + 2\sin^2\theta < 1$　　(2)　$\sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin\theta \geqq 0$

９．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta - 5\cos\theta + 1 = 0$　　(2)　$2\cos^2\theta - \sin\theta + 1 > 0$

数学演習（三角方程式・不等式）Ｈ２４．４．２０

1．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答　(1) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$　(2) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

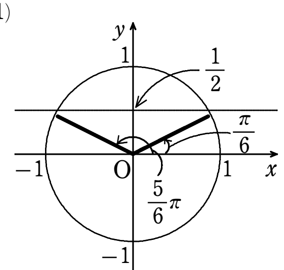
解説

n は整数とする。

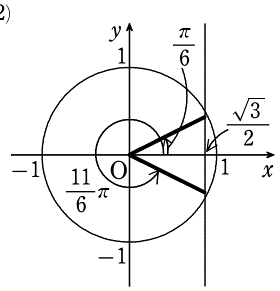
(1) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

(2) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

(1)

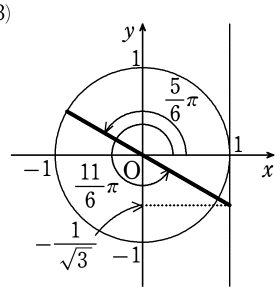


(2)



(3) $\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(3)



2．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\cos\theta > \frac{1}{2}$　　(3) $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$

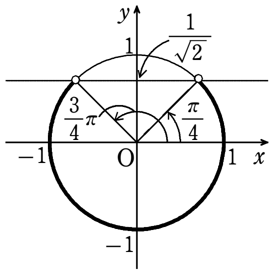
解答　(1) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi < \theta < 2\pi$　(2) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

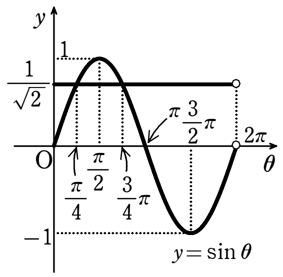
(3) $\frac{\pi}{3} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$

解説

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の解は　$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

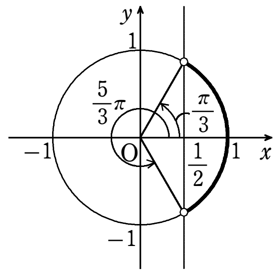
よって，不等式の解は，図から　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi < \theta < 2\pi$

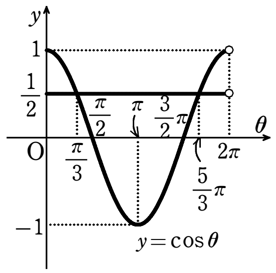




(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{1}{2}$ の解は　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

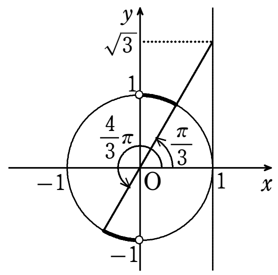
よって，不等式の解は，図から　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

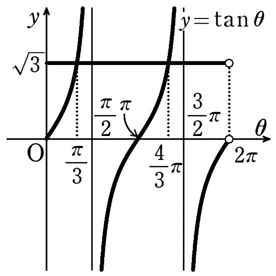




(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ の解は　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　$\frac{\pi}{3} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$





3．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $2\cos\theta + \sqrt{3} \leqq 0$　　(4) $\tan\theta + 1 > 0$

解答　(1) $\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$　(3) $\frac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi$

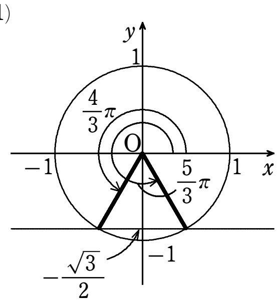
(4) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

解説

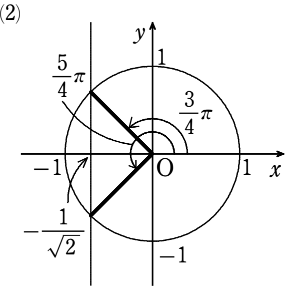
(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$ から　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　図から　$\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$ から　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$　　図から　$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

(1)



(2)

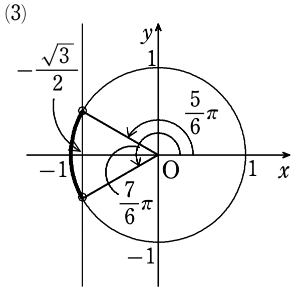


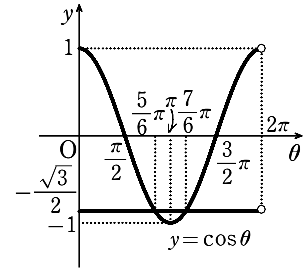
(3) $2\cos\theta + \sqrt{3} \leqq 0$ から　$\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ の解は　$\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　$\frac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi$

(3)



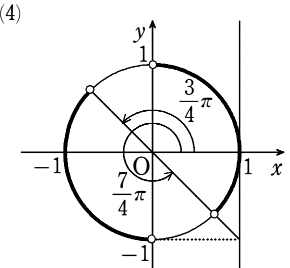


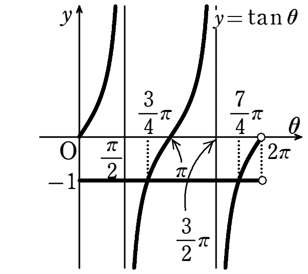
(4) $\tan\theta + 1 > 0$ から　$\tan\theta > -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = -1$ の解は　$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

(4)





4．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

解答　(1) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$　(2) $\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

解説

(1) $\theta - \frac{\pi}{3} = x$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{3} \leqq x < 2\pi - \frac{\pi}{3}$

すなわち　$-\frac{\pi}{3} \leqq x < \frac{5}{3}\pi$　……①

① の範囲で，$\sin x = -\frac{1}{2}$ を解くと　$x = -\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

$\theta - \frac{\pi}{3} = x$であるから　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$

(2) $2\theta + \frac{\pi}{3} = x$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のすべてを2倍して

$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi \cdot 2$　となり、すべてに$\frac{\pi}{3}$ を足して　$\frac{\pi}{3} \leqq x < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$

すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq x < \frac{13}{3}\pi$　……①　つまり，x は $\frac{\pi}{3}$ より２周する

① の範囲で，$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと　$x = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

$2\theta + \frac{\pi}{3} = x$ であるから　$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

より　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

5．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6},\ \pi\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi$

解説

(1)　$2\theta+\frac{\pi}{4}=t$　……① とおく。

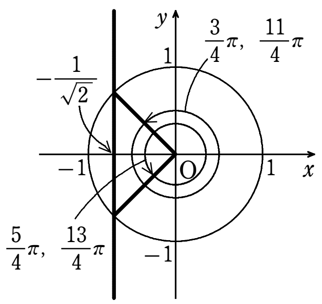
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$2\cdot0+\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<2\cdot2\pi+\frac{\pi}{4}$

すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{17}{4}\pi$　……②

② の範囲で $\cos t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと

$t=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi$



ここで，① に求めた t の値を代入して　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta-\frac{\pi}{6}=t$ とおく。

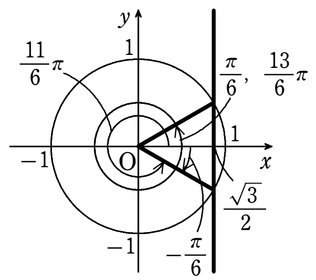
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$2\cdot0-\frac{\pi}{6}\leqq2\theta-\frac{\pi}{6}<2\cdot2\pi-\frac{\pi}{6}$

すなわち　$-\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{23}{6}\pi$　……①

① の範囲で $\cos t\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$-\frac{\pi}{6}\leqq t\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi\leqq t\leqq\frac{13}{6}\pi$



すなわち　$-\frac{\pi}{6}\leqq2\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi\leqq2\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$0\leqq2\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ 2\pi\leqq2\theta\leqq\frac{7}{3}\pi$

よって　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6},\ \pi\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi$

6．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$(\sin\theta+3)(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$　　(2)　$\cos\theta(\cos\theta-1)=0$

(3)　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-\sqrt{2})>0$　　(4)　$(\sin\theta-2)(2\sin\theta+1)>0$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$　　(2)　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　　(3)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

(4)　$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

解説

(1)　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから　$\sin\theta+3\neq0$

よって　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$　すなわち　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

(2)　方程式から　$\cos\theta=0$　または　$\cos\theta-1=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\cos\theta=0$ より　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$

よって，解は　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

(3)　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$\cos\theta+2>0$

よって　$2\cos\theta-\sqrt{2}>0$　すなわち　$\cos\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

(4)　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから　$\sin\theta-2<0$

よって　$2\sin\theta+1<0$　すなわち　$\sin\theta<-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

7．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta+\cos\theta=1$　　(2)　$2\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

解答　(1)　$\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$　　(2)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから，方程式は　$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta=1$

整理して　$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

ゆえに　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)=0$

よって　$\cos\theta=1,\ -\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\cos\theta=1$　より　$\theta=0$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから，方程式は　$2(1-\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

したがって　$(\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$　……①

$\sin\theta+\sqrt{3}\neq0$ であるから，① より　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$

すなわち　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

8．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\cos\theta+2\sin^2\theta<1$　　(2)　$\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin\theta\geqq0$

解答　(1)　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$　　(2)　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから，不等式は　$\cos\theta+2(1-\cos^2\theta)<1$

整理して　$2\cos^2\theta-\cos\theta-1>0$

ゆえに　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)>0$　……①

$\cos\theta-1\leqq0$ であるから，① より　$\cos\theta-1\neq0,\ 2\cos\theta+1<0$

すなわち　$\cos\theta\neq1,\ \cos\theta<-\frac{1}{2}$

$\cos\theta<-\frac{1}{2}$ を解くと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

このとき，$\cos\theta\neq1$ を満たすから，不等式の解である。

(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから，不等式は　$\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)+\sin\theta\geqq0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq0$

ゆえに　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)\geqq0$　……①

$\sin\theta+1\geqq0$ であるから，① より

$\sin\theta+1=0$　または　$2\sin\theta-1\geqq0$

すなわち　$\sin\theta=-1$　または　$\sin\theta\geqq\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=-1$ より　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta\geqq\frac{1}{2}$　より　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$

よって，解は　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi$

9．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta-5\cos\theta+1=0$　　(2)　$2\cos^2\theta-\sin\theta+1>0$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから，方程式は　$2(1-\cos^2\theta)-5\cos\theta+1=0$

整理して　$2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0$

ゆえに　$(\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)=0$　……①

$\cos\theta+3\neq0$ であるから，① より　$2\cos\theta-1=0$

すなわち　$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから，不等式は　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta+1>0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sin\theta-3<0$

ゆえに　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta+3)<0$　……①

$2\sin\theta+3>0$ であるから，① より　$\sin\theta-1<0$

すなわち　$\sin\theta<1$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$