数学演習（三角関数２）Ｈ２１．１０．２０　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．75°の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

２．$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\tan\alpha=-1$，$\tan\beta=-2$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

３．2 直線 $3x-y+1=0$，$x-2y+4=0$ のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

４．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$　　(2)　$\sin 2\theta>\cos\theta$

５．$0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

６．$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

7．$0 \leqq x < 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ を解け。

(2)　関数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

8．θ の関数 $y = \sin 2\theta + \sin\theta + \cos\theta$ について

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて，y を t の関数で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y のとりうる値の範囲を求めよ。

9．$f(\theta) = \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

10．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

１．75°の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

解答　$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$

$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=2+\sqrt{3}$$

２．$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\tan\alpha=-1$，$\tan\beta=-2$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{1+(-1)^2}=\dfrac{1}{2}$，　$\cos^2\beta=\dfrac{1}{1+\tan^2\beta}=\dfrac{1}{1+(-2)^2}=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　　$\cos\alpha<0$

よって　　$\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

また　　$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　　$\cos\beta<0$

よって　　$\cos\beta=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　　$\sin\beta=\tan\beta\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

したがって　　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

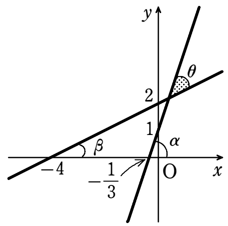
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

３．2 直線 $3x-y+1=0$，$x-2y+4=0$ のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

2 直線の方程式を変形すると

$y=3x+1$，$y=\dfrac{1}{2}x+2$



図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。

$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\left(3-\frac{1}{2}\right)\div\left(1+3\cdot\frac{1}{2}\right)=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

４．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$　　　　(2)　$\sin 2\theta>\cos\theta$

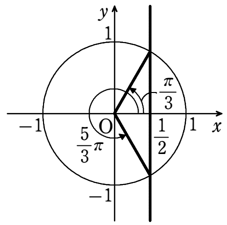
解答　(1)　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

(1)　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を方程式に代入して整理すると

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

よって　　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$

ゆえに　　$\cos\theta=1$　または　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=1$　のとき　　$\theta=0$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　のとき　　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって　　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(2)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を不等式に代入すると

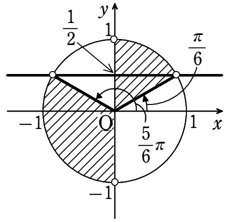
$2\sin\theta\cos\theta>\cos\theta$

よって　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)>0$

ゆえに　　$\cos\theta>0$，$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$

または

$\cos\theta<0$，$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

５．$0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\pi$ で最大値 3；$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$

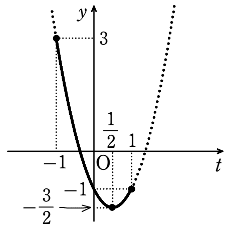
$\cos 2x=2\cos^2x-1$ であるから

$y=(2\cos^2x-1)-2\cos x=2\cos^2x-2\cos x-1$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t で表すと

$y=2t^2-2t-1=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$



$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，y は

$t=-1$ で最大値 3,

$t=\dfrac{1}{2}$　で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-1$ となるとき，$\cos x=-1$ から　　$x=\pi$

$t=\dfrac{1}{2}$　となるとき，$\cos x=\dfrac{1}{2}$　から　　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，この関数は $x=\pi$ で最大値 3，$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

６．$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

解答　$\sin 2\theta=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$，$\cos 3\theta=-\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　　$\cos\theta<0$

よって　　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

次に　　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

よって　　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

また　　$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=-3\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)+4\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3=-\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$

7. $0\leqq x<2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ を解け。

(2) 関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 (1) $x=\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$ (2) $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 2, $x=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2

(1) 左辺を変形して $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

ゆえに $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi$ よって $x=\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

(2) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

よって，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ がとる値の範囲は $-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに $-2\leqq y\leqq 2$

また，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ のとき，$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ から $x=\dfrac{\pi}{6}$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき，$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$ から $x=\dfrac{7}{6}\pi$

よって $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 2, $x=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2

8. θ の関数 $y=\sin 2\theta+\sin\theta+\cos\theta$ について

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて，y を t の関数で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y のとりうる値の範囲を求めよ。

解答 (1) $y=t^2+t-1$ (2) $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ (3) $-\dfrac{5}{4}\leqq y\leqq 1+\sqrt{2}$

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗して

$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin 2\theta$

すなわち $\sin 2\theta=t^2-1$

ゆえに $y=\sin 2\theta+(\sin\theta+\cos\theta)=(t^2-1)+t$

よって $y=t^2+t-1$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

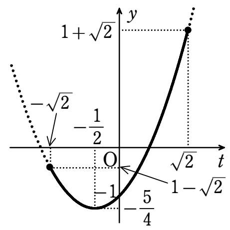
$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) (1) から $y=t^2+t-1$

$=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における，この関数の値域は

$-\dfrac{5}{4}\leqq y\leqq 1+\sqrt{2}$



9. $f(\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 1

$f(\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$

$=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+\dfrac{\sin 2\theta}{2}+2\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

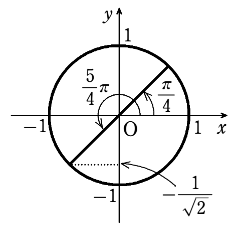
$=\dfrac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{3}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

よって $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに $1\leqq f(\theta)\leqq\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$



したがって，$f(\theta)$ は

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 1 をとる。

10. $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0$$

解答 $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

与式から $(\sin 2\theta+\sin 4\theta)+\sin 3\theta=0$

ここで $\sin 2\theta+\sin 4\theta=2\sin\dfrac{2\theta+4\theta}{2}\cos\dfrac{2\theta-4\theta}{2}=2\sin 3\theta\cos(-\theta)$

$=2\sin 3\theta\cos\theta$

よって $2\sin 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta=0$

すなわち $\sin 3\theta(2\cos\theta+1)=0$

したがって $\sin 3\theta=0$ または $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから $0\leqq 3\theta\leqq 3\pi$

この範囲で $\sin 3\theta=0$ を解くと $3\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

したがって，解は $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$