数学演習（三角関数１）Ｈ２１．１０．１３　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ。　半径が 10，中心角が $\frac{\pi}{5}$

２．$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ とする。$\cos\theta=-\frac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

３．$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$　(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

４．次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{65}{6}\pi$　(2) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$　(3) $\tan\frac{14}{3}\pi$

(4) $\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

５．2 次方程式 $25x^2-35x+4k=0$ の 2 つの解がそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ で表されるとき，k の値を求めよ。また，2 つの解を求めよ。

６．関数 $y=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

７．関数 $y=2\sin\theta+2\cos^2\theta-1$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値・最小値，および最大値・最小値を与える θ の値を求めよ。

８. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

(2) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta < 4$

９. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin 2\theta > \dfrac{1}{2}$

10. a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし， $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

数学演習（三角関数１）Ｈ２１．１０．１３　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ。　　半径が 10，中心角が $\dfrac{\pi}{5}$

解答　弧の長さは 2π，面積は 10π

弧の長さは　$10\cdot\dfrac{\pi}{5}=2\pi$

面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot10^2\cdot\dfrac{\pi}{5}=10\pi$

別解　面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot2\pi=10\pi$

２．$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ とする。$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　　$\sin\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$

３．$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$　　(3)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

解答　(1)　$-\dfrac{3}{8}$　　(2)　$-\dfrac{8}{3}$　　(3)　$-\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

ゆえに　　$\sin\theta\cos\theta=\left(\dfrac{1}{4}-1\right)\div2=-\dfrac{3}{8}$

(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=1\div\left(-\dfrac{3}{8}\right)=-\dfrac{8}{3}$

(3)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$　…… ①

ここで　　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{7}{4}$

$\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ であるから　　$\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$

よって　　$\sin\theta-\cos\theta<0$

ゆえに　　$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

したがって，① から

$$\sin^3\theta-\cos^3\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}\left(1-\frac{3}{8}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{5}{8}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

４．次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{65}{6}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\dfrac{11}{4}\pi\right)$　　(3)　$\tan\dfrac{14}{3}\pi$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$-\sqrt{3}$　　(4)　0

(1)　$\sin\dfrac{65}{6}\pi=\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi+10\pi\right)=\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(-\dfrac{11}{4}\pi\right)=\cos\dfrac{11}{4}\pi=\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+2\pi\right)=\cos\dfrac{3}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\dfrac{14}{3}\pi=\tan\left(\dfrac{2}{3}\pi+4\pi\right)=\tan\dfrac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

$=-\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos\theta-\sin\theta=0$

５．2 次方程式 $25x^2-35x+4k=0$ の 2 つの解がそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ で表されるとき，k の値を求めよ。また，2 つの解を求めよ。

解答　$k=3$；$x=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$

2 次方程式の解と係数の関係から

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{-35}{25}=\dfrac{7}{5}$　　…… ①

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{25}k$　　…… ②

① の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{49}{25}$　　よって　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$

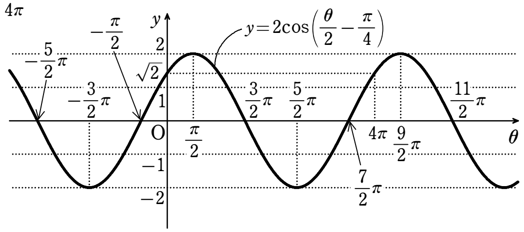
② を代入して　　$\dfrac{4}{25}k=\dfrac{12}{25}$　　ゆえに　　$k=3$

このとき，与えられた 2 次方程式は　　$25x^2-35x+12=0$

これを解いて，2 つの解は　　$x=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$

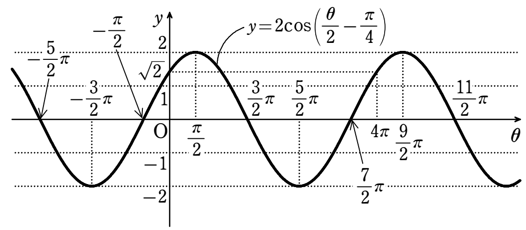
６．関数 $y=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

解答　［図］　周期は 4π



$y=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ から　　$y=2\cos\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって，グラフは下図。周期は　　$2\pi\div\dfrac{1}{2}=4\pi$



７．関数 $y=2\sin\theta+2\cos^2\theta-1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値・最小値，および最大値・最小値を与える θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから

$y=2\sin\theta+2(1-\sin^2\theta)-1=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+1$

$\sin\theta=t$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$-1\leqq t\leqq1$

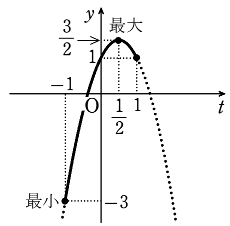
y を t で表すと

$y=-2t^2+2t+1=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

$-1\leqq t\leqq1$ の範囲で，y は

$t=\dfrac{1}{2}$　で最大値 $\dfrac{3}{2}$，

$t=-1$ で最小値 -3 をとる。



また，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$t=\dfrac{1}{2}$ となるとき，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$t=-1$ となるとき，$\sin\theta=-1$ から　　$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$

よって，この関数は　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　で最大値 $\dfrac{3}{2}$，

$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3　をとる。

8. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$　　(2) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta < 4$

解答 (1) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$　(2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$

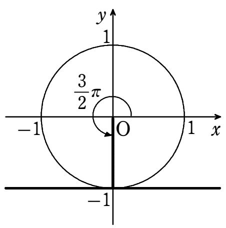
(1) 方程式を変形して　$2(1-\sin^2\theta) - \sin\theta - 1 = 0$

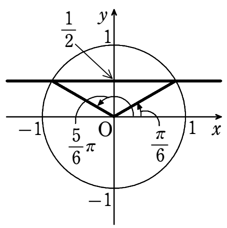
整理すると　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

因数分解して　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

よって　$\sin\theta = -1,\ \frac{1}{2}$　　$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

[1] $\sin\theta = -1$ のとき　$\theta = \frac{3}{2}\pi$　　[2] $\sin\theta = \frac{1}{2}$ のとき　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$





したがって　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2) 不等式を変形して　$2(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta < 4$

整理すると　$2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 > 0$

因数分解して　$(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) > 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから常に　$\cos\theta - 2 < 0$

よって　$2\cos\theta - 1 < 0$　　ゆえに　$\cos\theta < \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$

9. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin 2\theta > \frac{1}{2}$

解答 (1) $\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　　(2) $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi < \theta < \frac{17}{12}\pi$

(1) $2\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 4\pi + \frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{13}{3}\pi$

この範囲で，① を満たす t の値は

$t = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

よって　$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

ゆえに　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(2) $2\theta = t$ とおくと　$\sin t > \frac{1}{2}$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$0 \leqq 2\theta < 2 \cdot 2\pi$　すなわち　$0 \leqq t < 4\pi$

この範囲で，① を満たす t の値の範囲は

$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5}{6}\pi,$

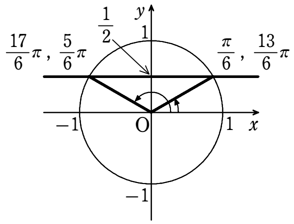
$\frac{13}{6}\pi < t < \frac{17}{6}\pi$

よって　$\frac{\pi}{6} < 2\theta < \frac{5}{6}\pi,$

$\frac{13}{6}\pi < 2\theta < \frac{17}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5}{12}\pi,$

$\frac{13}{12}\pi < \theta < \frac{17}{12}\pi$



10. a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

解答 (1) $-\frac{5}{4} \leqq a \leqq 1$

(2) $a < -\frac{5}{4}$ のとき 0 個，$a = -\frac{5}{4}$ のとき 2 個，$-\frac{5}{4} < a < -1$ のとき 4 個，$a = -1$ のとき 3 個，$-1 < a < 1$ のとき 2 個，$a = 1$ のとき 1 個，$1 < a$ のとき 0 個

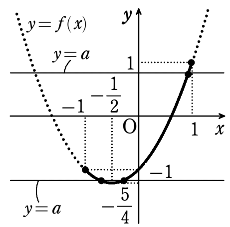
$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-1 \leqq x \leqq 1$　…… ①

方程式は　$(1-x^2) - x + a = 0$　　したがって　$x^2 + x - 1 = a$

$f(x) = x^2 + x - 1$ とすると　$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

(1) 求める条件は，① の範囲において，関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ が共有点をもつ条件と同じである。

よって，右の図から　$-\frac{5}{4} \leqq a \leqq 1$



(2) $x = -1$ のとき　$\theta = \pi$，　$x = 1$ のとき　$\theta = 0$

$-1 < x < 1$ のとき $\cos\theta = x$ を満たす θ は 2 個ある。

よって，$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の x 座標に注意して，方程式の解の個数を調べると

$a < -\frac{5}{4}$ のとき 0 個，$a = -\frac{5}{4}$ のとき 2 個，

$-\frac{5}{4} < a < -1$ のとき 4 個，$a = -1$ のとき 3 個，

$-1 < a < 1$ のとき 2 個，$a = 1$ のとき 1 個，$1 < a$ のとき 0 個