数学演習（三角関数）Ｈ２１．１０．２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{15}{4}\pi$　　(2) $\cos\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$　　(3) $\tan\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$

２．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

３．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

４．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ で $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin\theta - \cos\theta$　　(3) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

５．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

６．関数 $y = 4\cos\theta - 4\sin^2\theta + 10$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値と最小値およびそのときの θ の値を求めよ。

７．加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos 15°$　　(2) $\sin 75°$

８．α は第 1 象限の角で $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，β は第 3 象限の角で $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ とする。このとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

９．2 直線 $y=3x+4$ …… ①，$y=\frac{1}{2}x+2$ …… ② のなす角 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

10. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\cos2\theta+\sin\theta=0$

(2) $\cos\theta+\sin2\theta=0$

11. $0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

12. 関数 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。
また，そのグラフをかけ。

13. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=-1$

(2) $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

1．次の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{15}{4}\pi$　　(2) $\cos\left(-\dfrac{19}{6}\pi\right)$　　(3) $\tan\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)$

解答 (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\sqrt{3}$

(1) $\sin\dfrac{15}{4}\pi=\sin\left(\dfrac{7}{4}\pi+2\pi\right)=\sin\dfrac{7}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\left(-\dfrac{19}{6}\pi\right)=\cos\dfrac{19}{6}\pi=\cos\left(\dfrac{7}{6}\pi+2\pi\right)=\cos\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)=-\tan\dfrac{11}{3}\pi=-\tan\left(\dfrac{2}{3}\pi+3\pi\right)=-\tan\dfrac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$

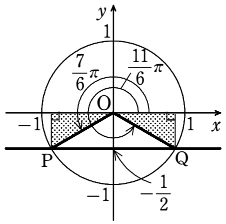
2．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta=\sqrt{3}$

解答 (1) $\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　(2) $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi$　(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$

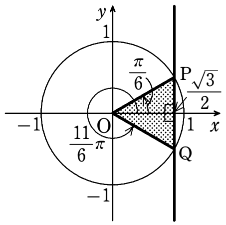
(1) 直線 $y=-\dfrac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，
求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

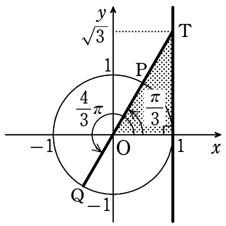


(2) 直線 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，
求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$



(3) 点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$

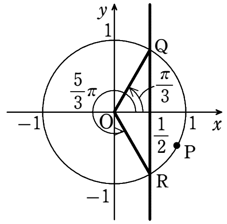


3．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta>\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

解答 $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値は $0\leqq\theta<2\pi$ で

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

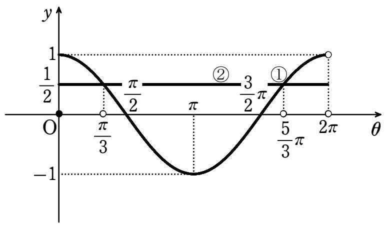


単位円上の点 P の x 座標が $\dfrac{1}{2}$ より大きくなるような θ の値の範囲を求めて

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$$

別解 $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で
$y=\cos\theta$ ……①
$y=\dfrac{1}{2}$ 　……②
のグラフをかくと，右図のようになる。
①のグラフが②のグラフより上側にある θ の値の範囲を求めて

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$$



4．$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$　　(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

解答 (1) $-\dfrac{1}{8}$　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(3) $\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を平方すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\left(\dfrac{3}{4}-1\right)\div2=-\dfrac{1}{8}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta$
$=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{5}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$\sin\theta\geqq0$
更に，(1)より　$\sin\theta\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta<0$
ゆえに，$\sin\theta-\cos\theta>0$ となるから　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right\}=\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$

5．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$2\sin^2\theta+\cos\theta-1=0$$

解答 $\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから
$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$
整理すると　$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

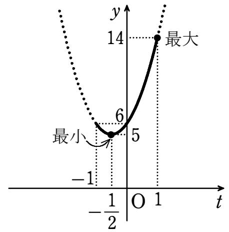
$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq1$
方程式は　$2t^2-t-1=0$
ゆえに　$(t-1)(2t+1)=0$　　よって　$t=1,\ -\dfrac{1}{2}$
この t の値は $-1\leqq t\leqq1$ を満たす。
[1] $t=1$ のとき　$\cos\theta=1$　　よって　$\theta=0$
[2] $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

以上から　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

6．関数 $y=4\cos\theta-4\sin^2\theta+10$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値およびそのときの θ の値を求めよ。

解答 $\theta=0$ のとき最大値 14；$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ のとき最小値 5

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから
$y=4\cos\theta-4(1-\cos^2\theta)+10$
$=4\cos^2\theta+4\cos\theta+6$
$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq1$
このとき　$y=4t^2+4t+6$
$=4(t^2+t)+6$
$=4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+6$
$=4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+5$



$-1\leqq t\leqq1$ の範囲において，y は
$t=1$　のとき最大値 14
$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 5 をとる。
また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから
$t=1$　となるのは　$\cos\theta=1$　より　$\theta=0$
$t=-\dfrac{1}{2}$ となるのは　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$
のときである。したがって，

$\theta=0$ のとき最大値 14；$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ のとき最小値 5

7．加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos15^\circ$　　(2) $\sin75^\circ$

解答 (1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(1) $\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$
$=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$
$=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

8. α は第 1 象限の角で $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，β は第 3 象限の角で $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ とする。このとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{63}{65}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{16}{65}$

α は第 1 象限の角であるから　　$\cos\alpha>0$

β は第 3 象限の角であるから　　$\sin\beta<0$

ゆえに　　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

よって　　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{12}{13}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{63}{65}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{12}{13}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{16}{65}$

9. 2 直線 $y=3x+4$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}x+2$ ……② のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

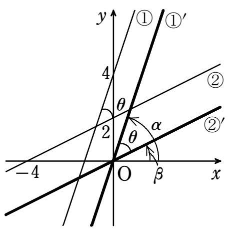
2 直線 ①，② のなす角は，2 直線

$y=3x$ ……①′，$y=\dfrac{1}{2}x$ ……②′

のなす角に等しい。

図のように，2 直線 ①′，②′ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，

$\theta=\alpha-\beta$ である。



また，$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\dfrac{1}{2}}{1+3\cdot\dfrac{1}{2}}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

10. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos2\theta+\sin\theta=0$　　　　(2)　$\cos\theta+\sin2\theta=0$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$　　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

(1)　$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ であるから，与えられた方程式は

$1-2\sin^2\theta+\sin\theta=0$　すなわち　$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$

ゆえに　　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$

よって　　$\sin\theta=1$，$-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=1$ より　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ より　　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

以上から　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

(2)　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから，与えられた不等式は

$\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta=0$　すなわち　$\cos\theta(2\sin\theta+1)=0$

よって　$\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと

$\cos\theta=0$ の解は　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，　$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ の解は　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

以上から　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

11. $0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

解答　$\sin2\alpha=-\dfrac{24}{25}$，$\cos2\alpha=\dfrac{7}{25}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$0<\alpha<\pi$ であるから　　$\sin\alpha>0$

ゆえに　　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

よって　　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

また　　$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2-1=\dfrac{7}{25}$

次に　　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right\}=\dfrac{9}{10}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$

$0<\alpha<\pi$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

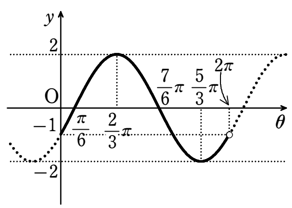
したがって　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

12.　関数 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解答　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 2,

$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最小値 -2,

[図] 実線部分



右辺を変形して　　$y=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

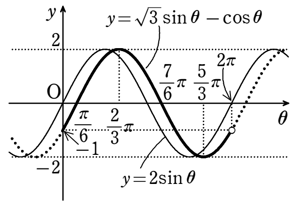
$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq2\pi-\dfrac{\pi}{6}$ であるから，y は

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち

$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 2

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$　すなわち

$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最小値 -2 をとる。



また，与えられた関数のグラフは，$y=2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動した曲線の $0\leqq\theta<2\pi$ の部分 [図]。

13. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=-1$　　　　(2)　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(1)　方程式の左辺を変形して

$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$　すなわち　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$

また　$\dfrac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$

この範囲で，$\sin t=-\dfrac{1}{2}$ の解は　　$t=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

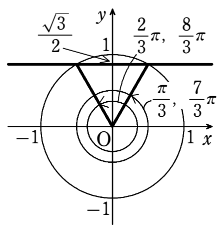
$\theta=t-\dfrac{\pi}{3}$ であるから　　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ ……① とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$2\cdot0-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}<2\cdot2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{11}{3}\pi$ ……②



② の範囲で $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$t=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{7}{3}\pi$，$\dfrac{8}{3}\pi$

ここで，① から　　$\theta=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

この式に求めた t の値を代入して　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$