数学演習（三角関数の合成）Ｈ２４．５．２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\cos\theta$　　(3) $\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$

2．関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ （$0\leqq\theta<2\pi$）の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。

3．関数 $y=\sin\theta-3\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

4．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta=\cos\theta$　　(2) $\cos 2\theta=\cos\theta$

(3) $\sin 2\theta<\sin\theta$　　(4) $\cos 2\theta>\sin\theta$

5．$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$　　(2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

(3) $\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$　　(4) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)>1$

６．$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = \sqrt{3}$ を解け。

７．$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

８．$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = (\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

９．$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数$y = 4\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 1$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

10. 関数 $y = \sin x\cos x + \sin x + \cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

数学演習（三角関数の合成）Ｈ２４．５．２　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\cos\theta$　　(3) $\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$

解答　(1) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$　(3) $2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

解説

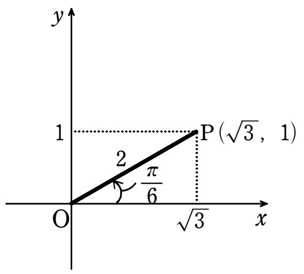
(1) 右の図のように，点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ をとると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α とすると　$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$\alpha=\frac{\pi}{6}$

よって　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$



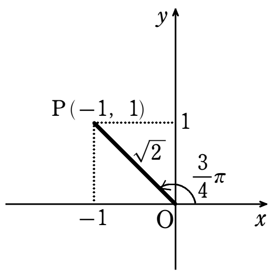
(2) 右の図のように，点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ をとると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α とすると　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\alpha=\frac{3}{4}\pi$

よって　$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$



(3) 右の図のように，点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ -\sqrt{6})$ をとると

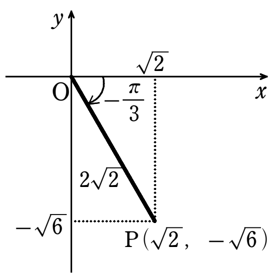
$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$

x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α とすると　$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

ゆえに　$\alpha=-\frac{\pi}{3}$

よって　$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$



2．関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 2，$\theta=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2

解説

右辺を変形して　$y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq2\pi+\frac{\pi}{3}$ であるから，

y は　$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$　すなわち

$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 2

$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$　すなわち

$\theta=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2 をとる。

3．関数 $y=\sin\theta-3\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　最大値 $\sqrt{10}$，最小値 $-\sqrt{10}$

解説

右の図のように，点 $\mathrm{P}(1,\ -3)$ をとると

$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

x 軸の正の部分から，線分 OP まで測った角を α とすると　$\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$　……①

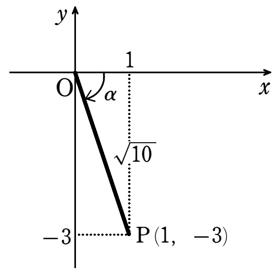
よって　$\sin\theta-3\cos\theta=\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，α は①を満たす角である。

ゆえに　$y=\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$

$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ であるから　$-\sqrt{10}\leqq y\leqq\sqrt{10}$

よって，y の最大値は $\sqrt{10}$，最小値は $-\sqrt{10}$



4．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin2\theta=\cos\theta$　　(2) $\cos2\theta=\cos\theta$

(3) $\sin2\theta<\sin\theta$　　(4) $\cos2\theta>\sin\theta$

解答　(1) $\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$　(2) $\theta=0$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$，$\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

(4) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから，方程式は　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\cos\theta=0$ より　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

(2) $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ であるから，方程式は　$2\cos^2\theta-1=\cos\theta$

整理して　$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

ゆえに　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)=0$

よって　$\cos\theta=1$，$-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=0$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

(3) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから，不等式は　$2\sin\theta\cos\theta<\sin\theta$

ゆえに　$\sin\theta(2\cos\theta-1)<0$

よって　$\begin{cases}\sin\theta>0\\2\cos\theta-1<0\end{cases}$ ……[1]　または　$\begin{cases}\sin\theta<0\\2\cos\theta-1>0\end{cases}$ ……[2]

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

[1] $\sin\theta>0$ より　$0<\theta<\pi$

$2\cos\theta-1<0$　すなわち　$\cos\theta<\frac{1}{2}$ より　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$

共通範囲をとって　$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$　……①

[2] $\sin\theta<0$ より　$\pi<\theta<2\pi$

$2\cos\theta-1>0$　すなわち　$\cos\theta>\frac{1}{2}$ より　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

共通範囲をとって　$\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$　……②

解は，①，②の範囲を合わせて　$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$，$\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

(4) $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ であるから，不等式は　$1-2\sin^2\theta>\sin\theta$

整理して　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1<0$

よって　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)<0$　……①

$\sin\theta+1\geqq0$ であるから，①より　$\sin\theta+1\neq0$，$2\sin\theta-1<0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta\neq-1$ より　$\theta\neq\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta<\frac{1}{2}$ より　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

解は，共通範囲をとって　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

5．$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$　　(2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

(3) $\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$　　(4) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)>1$

解答　(1) $x=\frac{\pi}{6}$　(2) $x=\frac{5}{12}\pi$，$\frac{11}{12}\pi$　(3) $\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$

(4) $0\leqq x<\frac{7}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi<x<2\pi$

解説

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

$x+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{7}{3}\pi$　……①

①の範囲で，$\sin t=1$ を解くと　$t=\frac{\pi}{2}$

$x=t-\frac{\pi}{3}$ であるから　$x=\frac{\pi}{6}$

(2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$　すなわち　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x-\frac{\pi}{6}=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから

$-\frac{\pi}{6}\leqq t<2\pi-\frac{\pi}{6}$　すなわち　$-\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{11}{6}\pi$　……①

① の範囲で，$\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を解くと　$t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

$x=t+\frac{\pi}{6}$ であるから　$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$

(3)　$\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$ から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x\geqq 0$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，不等式は　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

$x-\frac{\pi}{3}=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから

$-\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi-\frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{5}{3}\pi$　……①

① の範囲で，$\sin t\geqq 0$ を解くと　$0\leqq t\leqq\pi$　すなわち　$0\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\pi$

したがって　$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$

(4)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>1$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{4}=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{4}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{4}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{9}{4}\pi$　……①

① の範囲で，$\sin t>\frac{1}{2}$ を解くと　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<t<\frac{9}{4}\pi$

すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

したがって　$0\leqq x<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi<x<2\pi$

6．$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $2\cos x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=\sqrt{3}$ を解け。

解答　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

解説

$2\cos x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=2\sqrt{3}\cos^2 x-2\sin x\cos x=2\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-\sin 2x$

$=-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}$

であるから，方程式は　$-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}=\sqrt{3}$

整理して　$\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=0$

すなわち　$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{3}\leqq 2x-\frac{\pi}{3}<2\cdot 2\pi-\frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq 2x-\frac{\pi}{3}<\frac{11}{3}\pi$

であるから，① より　$2x-\frac{\pi}{3}=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

7．$0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ のとき最大値 4；$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 0

解説

$y=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{6}\leqq 2x+\frac{\pi}{6}<2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}$　すなわち　$\frac{\pi}{6}\leqq 2x+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$

であるから　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

したがって　$0\leqq y\leqq 4$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$　のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

よって，y は

$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ のとき最大値 4；$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 0

をとる。

8．$0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=(\sin x+\cos x)^2-2(\sin x+\cos x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{5}{4}\pi$ のとき最大値 $2+2\sqrt{2}$；$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -1

解説

$\sin x+\cos x=t$ とおくと　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ であるから

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　……①

y を t の式で表すと

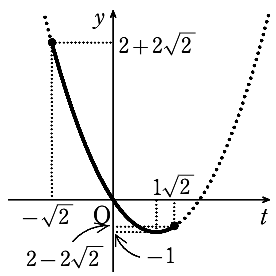
$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$

① の範囲で y は

$t=-\sqrt{2}$ のとき最大値 $2+2\sqrt{2}$，

$t=1$　のとき最小値 -1

をとる。



$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-\sqrt{2}$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$　よって　$x=\frac{5}{4}\pi$

$t=1$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　よって　$x=0,\ \frac{\pi}{2}$

したがって，$x=\frac{5}{4}\pi$ のとき最大値 $2+2\sqrt{2}$；$x=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -1 をとる。

9．$0\leqq x<2\pi$ のとき，関数$y=4\cos^2 x+4\sin x\cos x+1$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{9}{8}\pi$ のとき最大値 $2\sqrt{2}+3$；$x=\frac{5}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}+3$

解説

$y=4\cos^2 x+4\sin x\cos x+1=4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+4\cdot\frac{\sin 2x}{2}+1$

$=2\sin 2x+2\cos 2x+3=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+3$

$0\leqq x<2\pi$ より，$\frac{\pi}{4}\leqq 2x+\frac{\pi}{4}<2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{4}$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-2\sqrt{2}+3\leqq y\leqq 2\sqrt{2}+3$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{9}{8}\pi$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{5}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{9}{8}\pi$ のとき最大値 $2\sqrt{2}+3$；

$x=\frac{5}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}+3$

10. 関数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　最大値 $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$，最小値 -1

解説

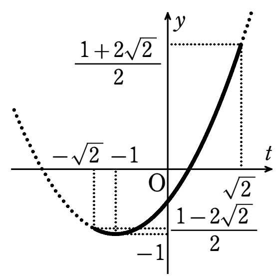
$\sin x+\cos x=t$ とおいて，この式の両辺を平方すると

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$

よって　$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

ゆえに　$y=\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{1}{2}(t^2+2t+1^2)-\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$



また，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　……①

① の範囲において，y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$，$t=-1$ で最小値 -1　をとる。