数学演習（三角関数）Ｈ２３．５．１６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

１．半径 $\frac{\pi}{2}$，中心角 $\frac{\pi}{4}$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

２．θ の動径が第４象限にあり，$\cos\theta\tan\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

３．$\tan\theta=-2$ のとき，$\dfrac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta-\sin^2\theta}$ の値を求めよ。

４．$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\pi<\theta<2\pi$ とする。

(1) $\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}$　　(2) $\cos\theta-\sin\theta$

５．$\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi-\theta)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)+\cos(\theta-2\pi)$ を簡単にせよ。

６．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin^3\theta=\sin\theta$　　(2) $\tan^2\theta>3$

７．a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta-\cos\theta+a=0$ について，この方程式が異なる１個の解をもつような a の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

８．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$

(2)　$\cos\left(2\theta-\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\tan\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)>-\sqrt{3}$

(4)　$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$

９．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2)　$y=\sin^2\theta+2\cos\theta$　$\left(\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi\right)$

数学演習（三角関数）Ｈ２３．５．１６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．半径 $\frac{\pi}{2}$，中心角 $\frac{\pi}{4}$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

解答　$l=3\pi$，$S=6\pi$

解説

$l=4\times\frac{3}{4}\pi=3\pi$

$S=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{3}{4}\pi=6\pi$

2．θ の動径が第４象限にあり，$\cos\theta\tan\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

解説

$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$　　ゆえに　　$\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

θ の動径が第２象限にあるとき　　$\cos\theta<0$

よって　　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

また　　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot(-3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$

3．$\tan\theta=-2$ のとき，$\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta-\sin^2\theta}$ の値を求めよ。

解答　-3

解説

$$(\text{与式})=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

よって，$\tan\theta=-2$を代入して

$(\text{与式})=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1-(-2)}{1+(-2)}=-3$

4．$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\pi<\theta<2\pi$とする。

(1)　$\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}$　　　　(2)　$\cos\theta-\sin\theta$

解答　(1)　3　　(2)　$-\frac{\sqrt{15}}{3}$

解説

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ の両辺を平方して　　$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

ゆえに　　$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

よって　　$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

(1)　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=1\div\frac{1}{3}=3$

(2)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

よって　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{5}{3}$　より　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$

ここで，θ は第３象限の角であるから $\sin\theta<0$ かつ $\cos\theta<0$

ゆえに，$\sin\theta+\cos\theta<0$となるので，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$ は不適

よって　　$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{3}$

5．$\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi-\theta)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)+\cos(\theta-2\pi)$ を簡単にせよ。

解答　$\sin\theta$

解説

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，

$\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$，

$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$　であるから

$(\text{与式})=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta=\sin\theta$

6．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin^3\theta=\sin\theta$　　　　(2)　$\tan^2\theta>3$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$　　(2)　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

解説

(1)　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$ から　　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

ゆえに　　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

よって　　$\sin\theta=-1$，$\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=-1$ より　　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

(2)　$2(1-\cos^2\theta)\geqq3\cos\theta$ から　　$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\leqq0$

ゆえに　　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)\leqq0$　……①

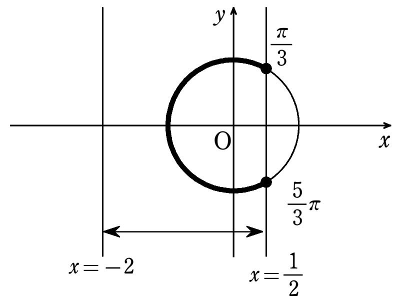
$\cos\theta+2>0$ であるから，① より　　$2\cos\theta-1\leqq0$　すなわち　$\cos\theta\leqq\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

別解

①の不等式より，解いて　$-2\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{2}$

ゆえに図から $\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$



7．a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta-\cos\theta+a=0$ について，この方程式が異なる１個の解をもつような a の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$とする。

解答　$a=-\frac{5}{4}$，$-1<a<1$

解説

$\cos\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$-1\leqq x\leqq1$　……①

方程式は　　$(1-x^2)-x+a=0$　　　したがって　　$x^2+x-1=a$

$f(x)=x^2+x-1$ とすると　　$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

$x=-1$ のとき　$\theta=\pi$，　$x=1$ のとき　$\theta=0$

$-1<x<1$ のとき $\cos\theta=x$ を満たす θ は２個ある。

よって，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標に注意して，方程式の解の個数を調べると

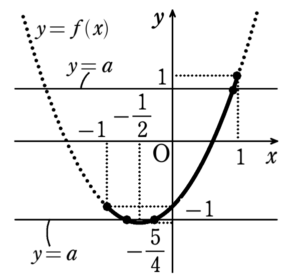
$a=-\frac{5}{4}$，$-1<a<1$ のときは，直線と放物線が

$-1<x<1$の範囲でただ１点の交点をもつ。

ゆえに，そのときのθ は２個存在するので

求めるaの値の範囲は

$a=-\frac{5}{4}$，$-1<a<1$　である。



8．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$　　　　(2)　$\cos\left(2\theta-\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

(3)　$\tan\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)>-\sqrt{3}$　　　　(4)　$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{1}{2}$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{3}{2}\pi$　　(2)　$\theta=\frac{3}{4}\pi$，$\frac{11}{12}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(3)　$\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$　　(4)　$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

解説

(1)　$\theta-\frac{\pi}{3}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{3}\leqq x<2\pi-\frac{\pi}{3}$

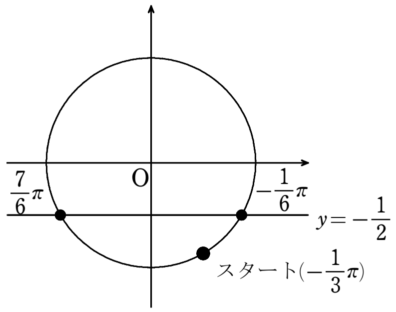
すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{5}{3}\pi$　……①

① の範囲で，$\sin x=-\frac{1}{2}$ を解くと

$x=-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

よって，$\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6},\frac{7}{6}\pi$

より　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$



(2)　$2\theta+\frac{\pi}{3}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{3}\leqq x<2\cdot2\pi+\frac{\pi}{3}$

すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{13}{3}\pi$　……①

①の範囲では，$\frac{\pi}{3}$ より２周する

① の範囲で，$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$x=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

　（１周目）　（２周目）

$2\theta+\frac{\pi}{3}=x$　より

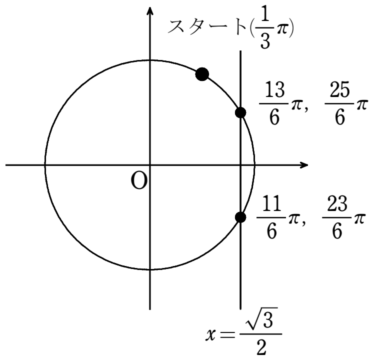
$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

すべてから$\frac{\pi}{3}$を引いて

$2\theta=\frac{9}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{21}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi$

すべて２で割って

$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$



(3)　$\theta-\frac{\pi}{6}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$-\frac{\pi}{6}\leqq x<2\pi-\frac{\pi}{6}$

すなわち　$-\frac{\pi}{6}\leqq x<\frac{11}{6}\pi$　……①

① の範囲で，$\tan x>1$ を解くと

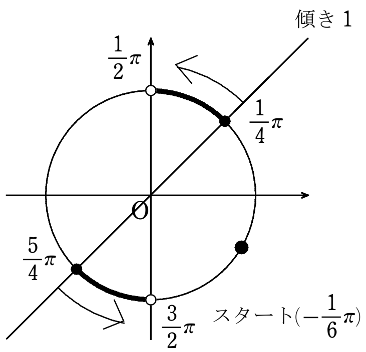
$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

すなわち

$\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{3}{2}\pi$

各辺に $\frac{\pi}{6}$ を加えて

$\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$



(4)　$2\theta+\frac{\pi}{6}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\frac{\pi}{6}\leqq x<2\cdot2\pi+\frac{\pi}{6}$

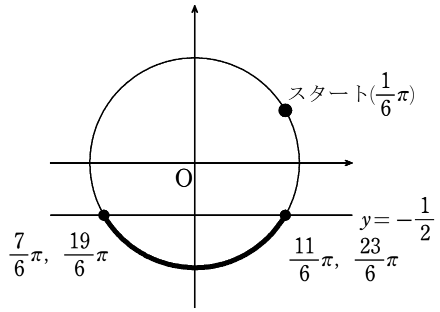
すなわち　$\frac{\pi}{6}\leqq x<\frac{25}{6}\pi$　……①

①の範囲は$\frac{\pi}{6}$をスタートして，２周する

① の範囲で，$\sin x\leqq-\frac{1}{2}$ を解くと

$\frac{7}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{23}{6}\pi$

　（１周目）　（２周目）



すなわち

$\frac{7}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{23}{6}\pi$

各辺から $\frac{\pi}{6}$ を引いて，

$\frac{6}{6}\pi\leqq2\theta\leqq\frac{10}{6}\pi,\ \frac{18}{6}\pi\leqq2\theta\leqq\frac{22}{6}\pi$

２で割ると

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

９．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2)　$y=\sin^2\theta+2\cos\theta$　$\left(\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{4}{3}\pi\right)$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 3，$\theta=\pi$ のとき最小値 0

(2)　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

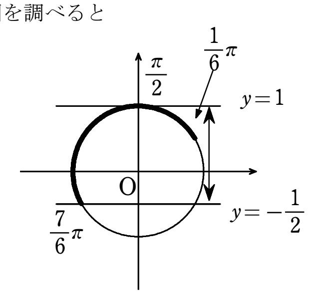
解説

(1)　$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$　である。

この範囲において，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ のとりうる値の範囲を調べると

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$のとき最大値1

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$のとき最小値$-\frac{1}{2}$



よって，$y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$ について

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$のとき最大値 $2\cdot1+1$

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$のとき最小値$2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

つまり

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 3,

$\theta=\pi$　のとき最小値 0

をとる。

(2)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$y=-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=\cos^2\theta-\cos\theta-1$

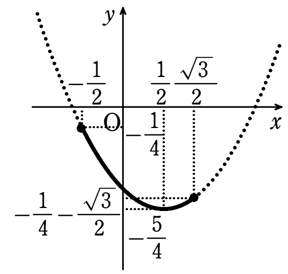
$\cos\theta=x$ とおくと，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ であるから　$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

y を x の式で表すと

$y=x^2-x-1$

$=\left\{x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



① の範囲において，y は

$x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{2}$　のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

をとる。

また，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ であるから

$x=-\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

$x=\frac{1}{2}$　となるのは，$\cos\theta=\frac{1}{2}$　より　$\theta=\frac{\pi}{3}$

のときである。

よって，　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$