数学演習（三角関数）Ｈ２０．１０．１０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の公式を完成させせよ。

(1) $\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)\\ \cos(\theta+2n\pi)\\ \tan(\theta+2n\pi)\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\sin(-\theta)\\ \cos(-\theta)\\ \tan(-\theta)\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\sin(\theta+\pi)\\ \cos(\theta+\pi)\\ \tan(\theta+\pi)\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\sin(\pi-\theta)\\ \cos(\pi-\theta)\\ \tan(\pi-\theta)\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)\end{cases}$

(8) $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)\\ \cos(\alpha-\beta)\end{cases}$

(9) $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)\\ \tan(\alpha-\beta)\end{cases}$

(10) $\begin{cases}\sin 2\alpha\\ \cos 2\alpha\\ \tan 2\alpha\end{cases}$

(12) $\begin{cases}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\\ \cos^2\dfrac{\alpha}{2}\\ \tan^2\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}$

2 次の角度の正弦•余弦•正接の値を求めよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{10}{3}\pi$

(3) $\dfrac{5}{2}\pi$

(4) $\dfrac{31}{6}\pi$

(5) $-\dfrac{29}{4}\pi$

3 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{5}{6}$ であるとき，次の値を求めよ。ただし，αは第２象限，βは第４象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

(2) $\sin(\alpha-\beta)$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

4 $\dfrac{1}{2}\pi<\theta<\pi$， $\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta$

(2) $\sin 2\theta$

(3) $\cos 2\theta$

(4) $\sin\dfrac{\theta}{2}$

(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}$

(6) $\tan\dfrac{\theta}{2}$

5 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta-5\cos\theta+3=0$

(2) $\sin 2\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

(3) $\cos 2\theta+2\cos^2\theta\geqq 0$

(4) $\sin 2\theta<\sqrt{3}\cos\theta$

6 $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos 2x-2\cos x+2$ の最大値・最小値とそのときのxの値を求めよ。

7 $0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$ を解け。

8 関数 $y=\sin x-\cos x+1$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

数学演習（三角関数）H２０．１０．１０　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ ）

1 次の公式を完成させよ。

(1) $\sin(\theta+2n\pi) = \sin\theta$, $\cos(\theta+2n\pi) = \cos\theta$, $\tan(\theta+2n\pi) = \tan\theta$

(2) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$　（x軸対称）

(3) $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$, $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$, $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$　（原点対称）

(4) $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$, $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$　（y軸対称）

(5) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

(7) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(8) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

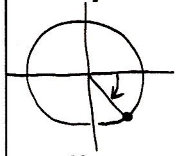
(9) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(10) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha$, $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(12) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$, $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$　← $\left(\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$

2 次の角度の正弦･余弦･正接の値を求めよ。

(1) $-\frac{\pi}{4}$

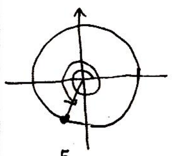


$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

(2) $\frac{10}{3}\pi = 2\pi + \frac{4}{3}\pi$

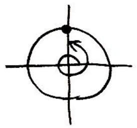


$\sin\frac{10}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{10}{3}\pi = \sqrt{3}$

(3) $\frac{5}{2}\pi = 2\pi + \frac{1}{2}\pi$

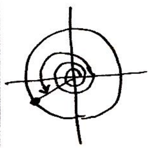


$\sin\frac{5}{2}\pi = 1$

$\cos\frac{5}{2}\pi = 0$

$\tan\frac{5}{2}\pi$ は存在しない

(4) $\frac{31}{6}\pi = 4\pi + \frac{7}{6}\pi$

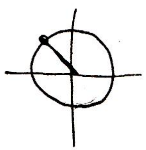


$\sin\frac{31}{6}\pi = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{31}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{31}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) $-\frac{29}{4}\pi = -6\pi - \frac{5}{4}\pi$



$\sin\left(-\frac{29}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\frac{29}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\frac{29}{4}\pi\right) = -1$

3 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{5}{6}$ であるとき，次の値を求めよ。ただし，αは第２象限，βは第４象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

$\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

αは第2象限より $\cos\alpha < 0$

$\therefore \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

(2) $\sin(\alpha-\beta)$

$\sin^2\beta = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1-\frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

βは第4象限より $\sin\beta < 0$

$\therefore \sin\beta = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = \frac{10+\sqrt{55}}{18}$

(2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = \frac{10-\sqrt{55}}{18}$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

(3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = \frac{-5\sqrt{5}+2\sqrt{11}}{18}$

(4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{5}+2\sqrt{11}}{18}$

4 $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$，$\cos\theta = -\frac{2}{5}$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) ~~$\cos\theta$~~ $\sin\theta$

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1-\frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

$\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$

(2) $\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{21}}{25}$

(3) $\cos 2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(-\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{4}{25} - 1 = \frac{8}{25} - 1 = -\frac{17}{25}$

(4) $\sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{1}{2}\pi<\theta<\pi$ より

$\frac{1}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$

よって $\sin\frac{\theta}{2}>0$ である。

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\{1-(-\frac{2}{5})\}=\frac{7}{10}$

∴ $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{7}{10}}$

(5) $\cos\frac{\theta}{2}$

(4)より $\frac{1}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$

から $\cos\frac{\theta}{2}>0$

∴ $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{5})=\frac{3}{10}$

∴ $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3}{10}}$

(6) $\tan\frac{\theta}{2}$

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{7}{10}}}{\sqrt{\frac{3}{10}}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\boxed{5}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos2\theta-5\cos\theta+3=0$

$\cos2\theta-5\cos\theta+3=0$

$(2\cos^2\theta-1)-5\cos\theta+3=0$

$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-2)=0$

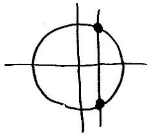
∴ $\cos\theta=\frac{1}{2},\ 2$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

なので $\cos\theta=2$ は不適

∴ $\cos\theta=\frac{1}{2}$



∴ $\theta=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

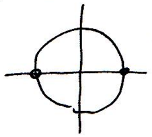
(2) $\sin2\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

$2\sin\theta\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

$\sin\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})=0$

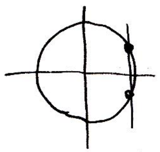
∴ $\sin\theta=0,\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

・$\sin\theta=0$ より



$\theta=0,\pi$

・$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より



$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

以上より

$\theta=0,\ \frac{1}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(3) ~~$\cos2\theta\geqq\cos^2\theta$~~ $\cos2\theta+2\cos^2\theta\geqq0$.

$2\cos^2\theta-1+2\cos^2\theta\geqq0$

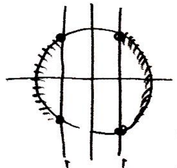
$4\cos^2\theta-1\geqq0$

$\cos^2\theta-\frac{1}{4}\geqq0$

$(\cos\theta+\frac{1}{2})(\cos\theta-\frac{1}{2})\geqq0$

∴ $\cos\theta\leqq-\frac{1}{2}$,

$\cos\theta\geqq\frac{1}{2}$



以上より

$0\leqq\theta\leqq\frac{1}{3}\pi$

$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{4}{3}\pi$

$\frac{5}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

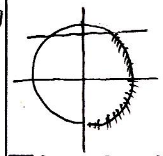
(4) $\sin2\theta<\sqrt{3}$ ~~$\sin\theta$~~ $\cos\theta$.

$2\sin\theta\cos\theta<\sqrt{3}\cos\theta$

$\cos\theta(2\sin\theta-\sqrt{3})<0$

∴ $\begin{cases}\cos\theta>0,\ 2\sin\theta-\sqrt{3}<0\cdots(\mathrm{i})\\ \cos\theta<0,\ 2\sin\theta-\sqrt{3}>0\cdots(\mathrm{ii})\end{cases}$

(i)より $\cos\theta>0,\ \sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$



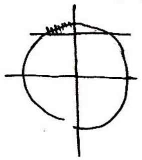
∴図より

$0<\theta<\frac{1}{3}\pi$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

(ii)より $\cos\theta<0$,

$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$.



図より

$\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi$

以上より

$0<\theta<\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi$,

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{6}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos2x-2\cos x+2$ の最大値・最小値とそのときのxの値を求めよ。

$y=\cos2x-2\cos x+2$

$=2\cos^2\theta-1-2\cos x+2$

$=2\cos^2\theta-2\cos x+1$

$t=\cos\theta$ とおくと．$0\leqq x<2\pi$ より

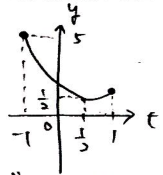
$-1\leqq t\leqq1$

また $y=2t^2-2t+1$

$=2(t^2-t)+1$

$=2\{(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+1$

$=2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$



グラフより

$t=\frac{1}{2}$の時，最小値$\frac{1}{2}$

$t=-1$の時，最大値5

・$t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\theta=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

・$t=-1\Leftrightarrow\cos\theta=-1$

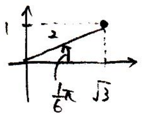
$\Leftrightarrow\theta=\pi$

以上より

最大値5 $(\theta=\pi)$

最小値$\frac{1}{2}$ $(\theta=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi)$

$\boxed{7}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}$ を解け。



$\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin(2x+\frac{1}{6}\pi)$

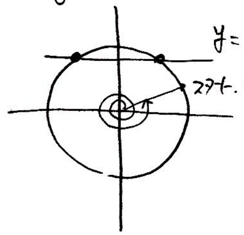
∴ $2\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}$

$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ここで $0\leqq x<2\pi$ より

$0\leqq2x<4\pi$

∴ $\frac{\pi}{6}\leqq2x+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{1}{6}\pi$



よって

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi+2\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2\pi$

$2x=\frac{1}{12}\pi,\ \frac{7}{12}\pi,\ \frac{1}{12}\pi+2\pi,\ \frac{7}{12}\pi+2\pi$

∴ $x=\frac{1}{24}\pi,\ \frac{7}{24}\pi$,

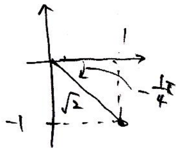
$\frac{1}{24}\pi+\pi,\ \frac{7}{24}\pi+\pi$

より

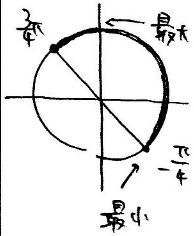
$x=\frac{1}{24}\pi,\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

$\boxed{8}$ 関数 $y=\sin x-\cos x+1$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

$y=\sqrt{2}\sin(x-\frac{1}{4}\pi)+1$



$0\leqq x\leqq\pi$ より $-\frac{1}{4}\pi\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$



ゆえに

・$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ の時，つまり $x=\frac{3}{4}\pi$ の時

$\sin(x-\frac{\pi}{4})$ は最大値1をとる

・$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ の時，つまり $x=0$ の時

$\sin(x-\frac{\pi}{4})$ は最小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる

ここで

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin(x-\frac{\pi}{4})\leqq1$) $\times\sqrt{2}$

$-1\leqq\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\leqq\sqrt{2}$) $+1$

$0\leqq\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+1\leqq\sqrt{2}+1$

以上より

最大値 $1+\sqrt{2}$ $(x=\frac{3}{4}\pi)$，最小値 0 $(x=0)$