数学演習（三角関数）H２０．１０．６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1 次の公式を完成させよ。

(1) $\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)\\ \cos(\theta+2n\pi)\\ \tan(\theta+2n\pi)\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\sin(-\theta)\\ \cos(-\theta)\\ \tan(-\theta)\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\sin(\theta+\pi)\\ \cos(\theta+\pi)\\ \tan(\theta+\pi)\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\sin(\pi-\theta)\\ \cos(\pi-\theta)\\ \tan(\pi-\theta)\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)\end{cases}$

(8) $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)\\ \cos(\alpha-\beta)\end{cases}$

(9) $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)\\ \tan(\alpha-\beta)\end{cases}$

(10) $\begin{cases}\sin 2\alpha\\ \cos 2\alpha\\ \tan 2\alpha\end{cases}$

(12) $\begin{cases}\sin^2\frac{\alpha}{2}\\ \cos^2\frac{\alpha}{2}\\ \tan^2\frac{\alpha}{2}\end{cases}$

2 次の角度の正弦･余弦･正接の値を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{3}{4}\pi$

(3) $\frac{3}{2}\pi$

(4) $\frac{19}{6}\pi$

(5) $-\frac{20}{3}\pi$

3 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$ であるとき，次の値を求めよ。ただし，αは第２象限，βは第４象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

(2) $\sin(\alpha-\beta)$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

4 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\theta$

(2) $\sin 2\theta$

(3) $\cos 2\theta$

(4) $\sin\dfrac{\theta}{2}$

(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}$

(6) $\tan\dfrac{\theta}{2}$

5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta + 5\sin\theta + 2 = 0$

(2) $\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 0$

(3) $\cos 2\theta \geqq 3\sin\theta - 1$

(4) $\sin 2\theta < \sqrt{2}\sin\theta$

6 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = \cos 2x + 2\sin x + 1$ の最大値・最小値とそのときのxの値を求めよ。

7 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1$を解け。

8 関数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$ $(0 \leqq x < \pi)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

1 次の公式を完成させよ。

(1)
$\sin(\theta+2n\pi) = \sin\theta$
$\cos(\theta+2n\pi) = \cos\theta$
$\tan(\theta+2n\pi) = \tan\theta$

(2)
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(3)
$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$
$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$
$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

(4)
$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

(5)
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$
$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$
$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$

（$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$
$= \sin\theta\cdot 0 + \cos\theta\cdot 1$
$= \cos\theta$）
でもよい

(6)
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

(7)
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(8)
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

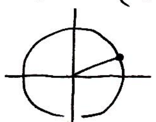
(9)
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(10)
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(12)
$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$
$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$
$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

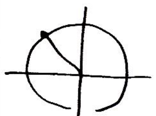
2 次の角度の正弦･余弦･正接の値を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{6}$ （30°）



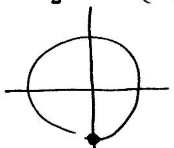
$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{3}{4}\pi$ $= \frac{1}{4}\pi\times 3$ （45°×3）



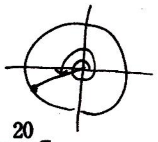
$\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\frac{3}{4}\pi = -1$

(3) $\frac{3}{2}\pi$ （270°）



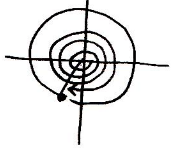
$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$
$\cos\frac{3}{2}\pi = 0$
$\tan\frac{3}{2}\pi$ は存在しない

(4) $\frac{19}{6}\pi = \frac{18+1}{6}\pi = 3\pi + \frac{\pi}{6}$



$\sin\frac{19}{6}\pi = -\frac{1}{2}$
$\cos\frac{19}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\frac{19}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) $-\frac{20}{3}\pi$
$= \frac{-21+1}{3}\pi = -7\pi + \frac{1}{3}\pi$
$= -6\pi - \frac{2}{3}\pi$



$\sin\left(-\frac{20}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
$\tan\left(-\frac{20}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$

3 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$ であるとき，次の値を求めよ。ただし，αは第２象限，βは第４象限の角とする。

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos\alpha < 0$ より $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$
$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$
$\sin\beta < 0$ より $\sin\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(2) $\sin(\alpha-\beta)$ $= \frac{3+8\sqrt{2}}{15}$

$\sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3-8\sqrt{2}}{15}$

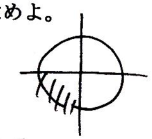
(3) $\cos(\alpha+\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{6\sqrt{2}-4}{15}$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4+6\sqrt{2}}{15}$

4 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ であるとき，次の値を求めよ。



(1) $\cos\theta$

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$
$= 1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$
$= 1-\frac{6}{9} = \frac{1}{3}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ より $\cos\theta<0$
∴ $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(3) $\cos 2\theta$

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$
$= 1-2\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$
$= 1-2\cdot\frac{6}{9}$
$= 1-\frac{4}{3}$
$= -\frac{1}{3}$

(4) $\sin\frac{\theta}{2}$　　$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ より $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$
$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

よって $\sin\frac{\theta}{2}>0$ より

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$

(5) $\cos\frac{\theta}{2}$

$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$
$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

(4)より $\cos\frac{\theta}{2}<0$ より

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$

(6) $\tan\frac{\theta}{2}$

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}}{-\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}}=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}=-\sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}}=-\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$
$=-\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}$
$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

5 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos2\theta+5\sin\theta+2=0$

$(1-2\sin^2\theta)+5\sin\theta+2=0$

∴ $2\sin^2\theta-5\sin\theta-3=0$

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-3)=0$

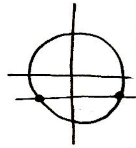
∴ $\sin\theta=-\frac{1}{2},\ 3$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ から

$\sin\theta=3$ は不適

よって $\sin\theta=-\frac{1}{2}$



∴ $\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(2) $\sin2\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0$

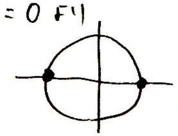
$2\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0$

$\sin\theta(2\cos\theta+\sqrt{3})=0$

よって

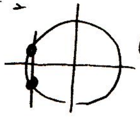
$\sin\theta=0$ または $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=0$ より



$\theta=0,\ \pi$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より



$\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

以上より

$\theta=0,\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{7}{6}\pi$

(3) $\cos2\theta\geqq3\sin\theta-1$

$1-2\sin^2\theta\geqq3\sin\theta-1$

$-2\sin^2\theta-3\sin\theta+2\geqq0$

∴

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2\leqq0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)\leqq0$

ここで $-1\leqq\sin\theta\leqq1$

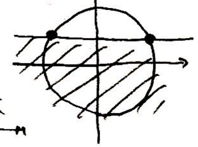
より $\sin\theta+2>0$

ゆえに

$2\sin\theta-1\leqq0$

となる。 $\sin\theta\leqq\frac{1}{2}$

より



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$
$\frac{5}{6}\pi\leqq\theta<2\pi$

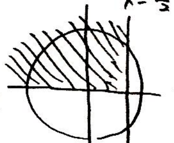
(4) $\sin2\theta<\sqrt{2}\sin\theta$

$2\sin\theta\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta<0$

$\sin\theta(2\cos\theta-\sqrt{2})<0$

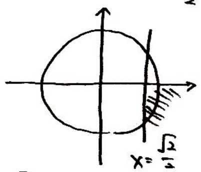
よって (i) $\sin\theta>0$ かつ $2\cos\theta-\sqrt{2}<0$
(ii) $\sin\theta<0$ かつ $2\cos\theta-\sqrt{2}>0$

(i)の時
$\sin\theta>0$
$\cos\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$



∴ $\frac{\pi}{4}<\theta<\pi$

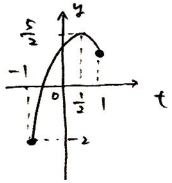
(ii)の時 $\sin\theta<0$
$\cos\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

以上より
$\frac{\pi}{4}<\theta<\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

6 $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos2x+2\sin x+1$ の最大値・最小値とそのときのxの値を求めよ。



$y=\cos2x+2\sin x+1$
$=1-2\sin^2x+2\sin x+1$
$=-2\sin^2x+2\sin x+2$

$t=\sin x$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$

より $-1\leqq t\leqq1$

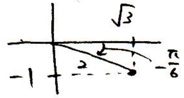
また $y=-2t^2+2t+2$
$=-2(t^2-t)+2$
$=-2\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+2$
$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

グラフより
$t=\frac{1}{2}$の時 最大
$t=-1$の時 最小

また
$t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$
$t=-1\Leftrightarrow\sin x=-1$
$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\pi$

最大値 $\frac{5}{2}$ $\left(x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right)$
最小値 -2 $\left(x=\frac{3}{2}\pi\right)$

7 $0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=1$ を解け。

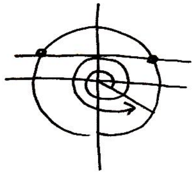


$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

∴ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$
$0\leqq 2x<4\pi$

∴ $-\frac{\pi}{6}\leqq2x-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}$



$y=\frac{1}{2}$

よって
$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{6}+2\pi,\ \frac{5}{6}\pi+2\pi$

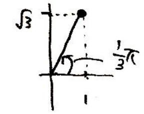
∴

$2x=\frac{2}{6}\pi,\ \frac{6}{6}\pi,$
$\frac{2}{6}\pi+2\pi,\ \frac{6}{6}\pi+2\pi$

∴

$x=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

8 関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

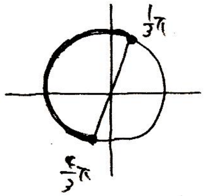


$y=2\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)+1$

$0\leqq x\leqq\pi$ より

$\frac{1}{3}\pi\leqq x+\frac{1}{3}\pi\leqq\frac{4}{3}\pi.$

よって $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ について



図より 最大値1 $\left(x+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\pi\right)$
最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi\right)$

よって
$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$)×2
$-\sqrt{3}\leqq2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq2$)+1
$1-\sqrt{3}\leqq2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq3$

そして
$x+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\pi$ ∴ $x=\frac{1}{6}\pi$
$x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ ∴ $x=\pi$

以上より

最大値 3 $\left(x=\frac{1}{6}\pi\right)$
最小値 $1-\sqrt{3}$ $(x=\pi)$