数学演習（加法定理）Ｈ２４．４．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．$105^\circ=60^\circ+45^\circ$ であることを用いて，$\sin 105^\circ$，$\cos 105^\circ$，$\tan 105^\circ$ の値をそれぞれ求めよ。

2．半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{3}{8}\pi$　　(2)　$\cos\frac{3}{8}\pi$　　(3)　$\tan\frac{3}{8}\pi$

3．α は第 1 象限の角で $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，β は第 3 象限の角で $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ とする。このとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

4．$\sin\alpha=\frac{1}{2}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\beta=\frac{1}{3}\ \left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

5．(1)　$0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

(2)　$\sin 15^\circ$ の値を求めよ。

6．2 直線 $y=3x+4$　……①，$y=\frac{1}{2}x+2$　……② のなす角 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

7．関数 $y=\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\left(-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

8．$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\cos\theta=-\frac{2}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin\frac{\theta}{2}$，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

9．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos 2\theta+4\cos\theta+3=0$

(2) $\cos 2\theta<\sin\theta$

1．$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ であることを用いて，$\sin 105^\circ$，$\cos 105^\circ$，$\tan 105^\circ$ の値をそれぞれ求めよ。

解答　$\sin 105^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 105^\circ = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，$\tan 105^\circ = -2-\sqrt{3}$

解説

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ+45^\circ)\\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ+45^\circ)\\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ+45^\circ)\\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}\\ &= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{1-3}\\ &= -2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

2．半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{3}{8}\pi$　　(2)　$\cos\dfrac{3}{8}\pi$　　(3)　$\tan\dfrac{3}{8}\pi$

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　　(3)　$\sqrt{2}+1$

解説

(1)　$$\sin^2\frac{3}{8}\pi = \sin^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\dfrac{3}{8}\pi > 0$ であるから　　$\sin\dfrac{3}{8}\pi = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(2)　$$\cos^2\frac{3}{8}\pi = \cos^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\dfrac{3}{8}\pi > 0$ であるから　　$\cos\dfrac{3}{8}\pi = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(3)　$$\begin{aligned}\tan^2\frac{3}{8}\pi &= \tan^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}\\ &= \frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2\end{aligned}$$

$\tan\dfrac{3}{8}\pi > 0$ であるから　　$\tan\dfrac{3}{8}\pi = \sqrt{2}+1$

別解　(1)，(2) から

$$\begin{aligned}\tan\frac{3}{8}\pi &= \frac{\sin\frac{3}{8}\pi}{\cos\frac{3}{8}\pi} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}\\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

3．α は第 1 象限の角で $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$，$\beta$ は第 3 象限の角で $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$ とする。このとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\sin(\alpha+\beta) = -\dfrac{63}{65}$，$\cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{16}{65}$

解説

α は第 1 象限の角であるから　　$\cos\alpha > 0$

β は第 3 象限の角であるから　　$\sin\beta < 0$

ゆえに　　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{12}{13}$

$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$

よって　　$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ &= \frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{65}\end{aligned}$$

4．$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\beta = \dfrac{1}{3}\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$，$\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{-2\sqrt{6}+1}{6}$，

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{8\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{23}$

解説

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\alpha > 0$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　　$\cos\beta < 0$

よって　　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　　$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{-2\sqrt{6}+1}{6}\end{aligned}$$

また　　$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

よって　　$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6} \div \frac{-2\sqrt{6}+1}{6}\\ &= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1} = \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)} = \frac{8\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{23}\end{aligned}$$

別解　$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

よって　　$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\} \div \left\{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}\\ &= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1} = \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)}\\ &= \frac{8\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{23}\end{aligned}$$

5．(1)　$0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

(2)　$\sin 15^\circ$ の値を求めよ。

解答　(1)　$\sin 2\alpha = -\dfrac{24}{25}$，$\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

(1)　$0<\alpha<\pi$ であるから　　$\sin\alpha > 0$

ゆえに　　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

よって　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

また　　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{25}$

次に　　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right\} = \dfrac{9}{10}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1-\dfrac{9}{10} = \dfrac{1}{10}$

$0<\alpha<\pi$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$

したがって　　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(2)　$\sin^2 15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin 15^\circ > 0$ であるから　　$\sin 15^\circ = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$

ここで根号の中は　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{(3+1)-2\sqrt{3\cdot1}}{8}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$

である（2 重根号をはずす）

から　$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

（別に，$15^\circ=45^\circ-30^\circ$から，加法定理で求めても全然構わない）

6．2 直線 $y=3x+4$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}x+2$ ……② のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

解説

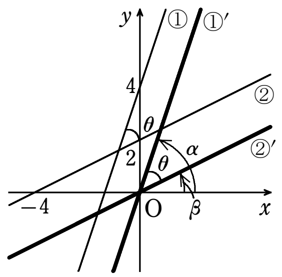
2 直線 ①，② のなす角は，2 直線

$y=3x$ ……①′，$y=\dfrac{1}{2}x$ ……②′

のなす角に等しい。

図のように，2 直線 ①′，②′ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，

$\theta=\alpha-\beta$ である。



また，$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

7．関数 $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\sin x\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{3}{2}$

解説

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ であるから

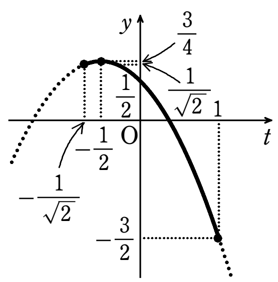
$y=\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2 x)-\sin x=-\sin^2 x-\sin x+\dfrac{1}{2}$

$\sin x=t$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1$ ……①

y を t で表すと

$y=-t^2-t+\dfrac{1}{2}=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$



① の範囲において，y は

$t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$，$t=1$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$t=-\dfrac{1}{2}$ となるとき，$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ から　$x=-\dfrac{\pi}{6}$

$t=1$ 　となるとき，$\sin x=1$ 　から　$x=\dfrac{\pi}{2}$

よって，この関数は

$x=-\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

8．$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{9}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，$\sin 3\theta=\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$

解説

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-1=-\dfrac{1}{9}$

次に　$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}=\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

ゆえに　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{5}{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

また　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^3=\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$

9．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$2\cos 2\theta+4\cos\theta+3=0$　　(2)　$\cos 2\theta<\sin\theta$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$　(2)　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$

解説

(1)　与えられた方程式に $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を代入して

$2(2\cos^2\theta-1)+4\cos\theta+3=0$

整理して　$4\cos^2\theta+4\cos\theta+1=0$

ゆえに　$(2\cos\theta+1)^2=0$　よって　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

(2)　与えられた不等式は　$1-2\sin^2\theta<\sin\theta$

整理して　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1>0$

左辺を因数分解して　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)>0$

$0\leqq\theta<2\pi$ で，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから　$\sin\theta+1\geqq0$

ゆえに　$2\sin\theta-1>0$　よって　$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$