

1. 半径 4, 中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

2. θ の動径が第 2 象限にあり, $\tan \theta = -3$ のとき, $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

3. $\tan \theta = -2$ のとき, $\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}$ の値を求めよ。

4. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 次の式の値を求めよ。ただし, θ は第 3 象限の角とする。

(1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ (2) $\sin \theta + \cos \theta$

5. $\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \sin (\theta + \pi) + \sin \left(\theta + \frac{3}{2} \pi \right) + \sin (\theta + 2 \pi)$ を簡単にせよ。

6. $0 \leq \theta < 2 \pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $2 \cos^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ (2) $2 \sin^2 \theta \geq 3 \cos \theta$

7. a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について、この方程式が異なる 2 個の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

8. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

- (1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$

(4) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{1}{2}$

9. 次の関数の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。

- (1) $y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$
- (2) $y = -\sin^2\theta - \cos\theta \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi\right)$

1. 半径 4, 中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

【解答】 $l=3\pi, S=6\pi$

【解説】

$$l=4\times\frac{3}{4}\pi=3\pi$$

$$S=\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{3}{4}\pi=6\pi$$

2. θ の動径が第 2 象限にあり, $\tan \theta = -3$ のとき, $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

【解答】 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

【解説】

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-3)^2 = 10 \qquad \text{ゆえに} \qquad \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

θ の動径が第 2 象限にあるとき $\cos \theta < 0$

$$\text{よって} \qquad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{また} \qquad \sin \theta = \cos \theta \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

3. $\tan \theta = -2$ のとき, $\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}$ の値を求めよ。

【解答】 -3

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\frac{\cos \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \end{aligned}$$

よって, $\tan \theta = -2$ を代入して

$$\text{(与式)} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{1 - (-2)}{1 + (-2)} = -3$$

4. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 次の式の値を求めよ。ただし, θ は第 3 象限の角とする。

$$(1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \qquad (2) \sin \theta + \cos \theta$$

【解答】 (1) 3 (2) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$

【解説】

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ の両辺を平方して } \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに} \qquad 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \qquad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= 1 \div \frac{1}{3} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{5}{3} \quad \text{より} \quad \sin \theta + \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

ここで, θ は第 3 象限の角であるから $\sin \theta < 0$ かつ $\cos \theta < 0$

$$\text{ゆえに, } \sin \theta + \cos \theta < 0 \text{ となるので, } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{3} \text{ は不適}$$

$$\text{よって} \qquad \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{3}$$

5. $\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \sin (\theta + \pi) + \sin \left(\theta + \frac{3}{2} \pi \right) + \sin (\theta + 2\pi)$ を簡単にせよ。

【解答】 $\sin \theta$

【解説】

$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta, \quad \sin (\theta + \pi) = -\sin \theta,$$

$$\sin \left(\theta + \frac{3}{2} \pi \right) = \sin \left\{ \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \pi \right\} = -\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta,$$

$$\sin (\theta + 2\pi) = \sin \theta \text{ であるから}$$

$$\text{(与式)} = \sin \theta + \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

6. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

$$(1) 2 \cos^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0 \qquad (2) 2 \sin^2 \theta \geq 3 \cos \theta$$

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

【解説】

$$(1) 2(1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta - 1 = 0 \text{ から } 2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (\sin \theta + 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = -1, \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから, } \sin \theta = -1 \text{ より } \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{したがって, 解は } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$(2) 2(1 - \cos^2 \theta) \geq 3 \cos \theta \text{ から } 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 \leq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (\cos \theta + 2)(2 \cos \theta - 1) \leq 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

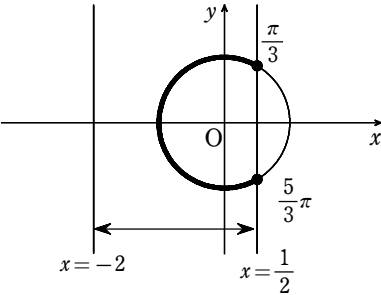
$$\cos \theta + 2 > 0 \text{ であるから, ① より } 2 \cos \theta - 1 \leq 0 \text{ すなわち } \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

【別解】

$$\text{①の不等式より, 解いて } -2 \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに図から } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$



7. a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2 \theta - \cos \theta + a = 0$ について, この方程式が異なる 2 個の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

【解答】 $a = -\frac{5}{4}, -1 < a < 1$

【解説】

$$\cos \theta = x \text{ とおくと, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから } -1 \leq x \leq 1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{方程式は } (1 - x^2) - x + a = 0 \text{ したがって } x^2 + x - 1 = a$$

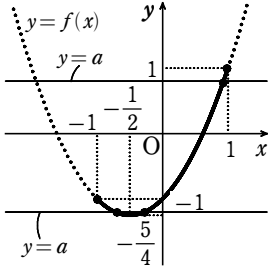
$$f(x) = x^2 + x - 1 \text{ とすると } f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$x = -1$ のとき $\theta = \pi$, $x = 1$ のとき $\theta = 0$
 $-1 < x < 1$ のとき $\cos \theta = x$ を満たす θ は 2 個ある。
よって, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点
の x 座標に注意して, 方程式の解の個数を調べると

$a = -\frac{5}{4}$, $-1 < a < 1$ のときは, 直線と放物線が

$-1 < x < 1$ の範囲でただ 1 点の交点をもつ。
ゆえに, そのときの θ は 2 個存在するので
求める a の値の範囲は

$$a = -\frac{5}{4}, -1 < a < 1 \text{ である。}$$



8. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

$$(1) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \qquad (2) \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \tan \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) > 1 \qquad (4) \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq -\frac{1}{2}$$

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\pi$ (2) $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi, \frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$ (4) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi$

【解説】

$$(1) \quad \theta - \frac{\pi}{3} = x \text{ とおくと, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから} \quad -\frac{\pi}{3} \leq x < 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

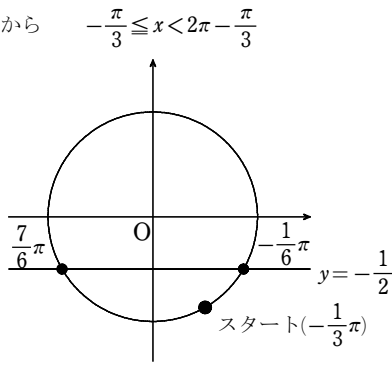
$$\text{すなわち} \quad -\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{5}{3}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の範囲で, $\sin x = -\frac{1}{2}$ を解くと

$$x = -\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{よって, } \theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{より} \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\pi$$



$$(2) \quad 2\theta + \frac{\pi}{3} = x \text{ とおくと, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{13}{3}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の範囲では, $\frac{\pi}{3}$ より 2 周する

$$\textcircled{1} \text{ の範囲で, } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ を解くと}$$

$$x = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi, \frac{25}{6}\pi$$

(1 周目) (2 周目)

$$2\theta + \frac{\pi}{3} = x \quad \text{より}$$

$$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi, \frac{25}{6}\pi$$

すべてから $\frac{\pi}{3}$ を引いて

$$2\theta = \frac{9}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{21}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi$$

すべて 2 で割って

$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

$$(3) \quad \theta - \frac{\pi}{6} = x \text{ とおくと, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq x < 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{すなわち} \quad -\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{11}{6}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の範囲で, $\tan x > 1$ を解くと

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

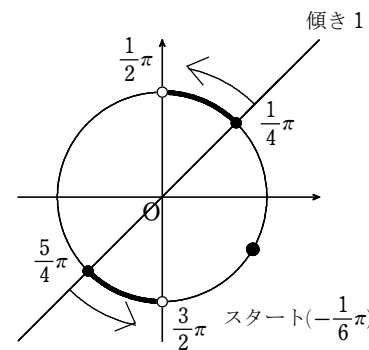
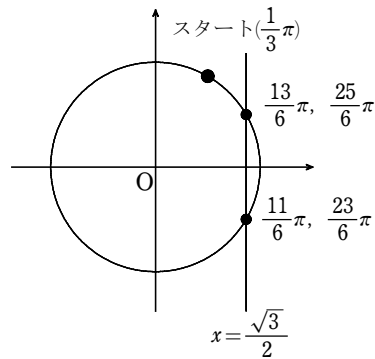
すなわち

$$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$$

各辺に $\frac{\pi}{6}$ を加えて

$$\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi, \frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

$$(4) \quad 2\theta + \frac{\pi}{6} = x \text{ とおくと, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから}$$



$$\frac{\pi}{6} \leq x < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{25}{6}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の範囲は $\frac{\pi}{6}$ をスタートして, 2 周する

①の範囲で, $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ を解くと

$$\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi \leq x \leq \frac{23}{6}\pi$$

(1 周目) (2 周目)

すなわち

$$\frac{7}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{23}{6}\pi$$

各辺から $\frac{\pi}{6}$ を引いて,

$$\frac{6}{6}\pi \leq 2\theta \leq \frac{10}{6}\pi, \frac{18}{6}\pi \leq 2\theta \leq \frac{22}{6}\pi$$

2 で割ると

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi$$

9. 次の関数の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。

$$(1) \quad y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$(2) \quad y = -\sin^2\theta - \cos\theta \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } 3, \theta = \pi \text{ のとき最小値 } 0$$

$$(2) \quad \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき最大値 } -\frac{1}{4}, \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最小値 } -\frac{5}{4}$$

【解説】

$$(1) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi \quad \text{である。}$$

この範囲において, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ のとりうる値の範囲を調べると

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } 1$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{2}$$

よって, $y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ について

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } 2 \cdot 1 + 1$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \text{ のとき最小値 } 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

つまり

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } 3,$$

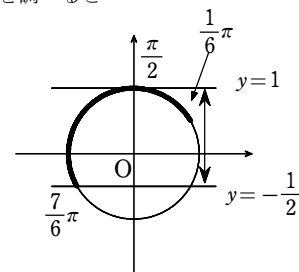
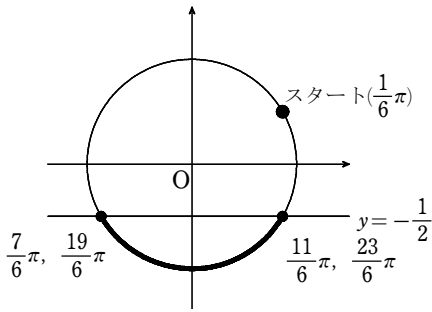
$$\theta = \pi \text{ のとき最小値 } 0$$

をとる。

$$(2) \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \text{ であるから}$$

$$y = -(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = \cos^2\theta - \cos\theta - 1$$

$$\cos\theta = x \text{ とおくと, } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ であるから} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



y を x の式で表すと

$$y = x^2 - x - 1$$

$$= \left\{ x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

①の範囲において, y は

$$x = -\frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } -\frac{5}{4}$$

をとる。

また, $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ であるから

$$x = -\frac{1}{2} \text{ となるのは, } \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ より} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ となるのは, } \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ より} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

のときである。

$$\text{よって, } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき最大値 } -\frac{1}{4}, \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最小値 } -\frac{5}{4}$$

