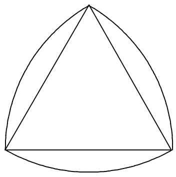
数学演習（三角関数）Ｈ２０．２．１９　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．1 辺の長さが 10 cm の正三角形の各頂点を中心とし，他の頂点を通る円弧を右の図のように描く。この 3 つの円弧で囲まれた図形の周の長さと面積を求めよ。



２．次の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{65}{6}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$　　(3)　$\tan\frac{14}{3}\pi$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

３．$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$ $(\pi<\theta<2\pi)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$　　(3)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

４．$0\leqq x<2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ を解け。

(2)　関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

５．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$　　(2)　$\sin 2\theta>\cos\theta$

6．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7．$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

8．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

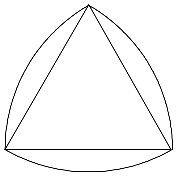
$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$

9．a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。

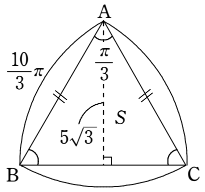
(2)　この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

１．1 辺の長さが 10 cm の正三角形の各頂点を中心とし，他の頂点を通る円弧を右の図のように描く。この 3 つの円弧で囲まれた図形の周の長さと面積を求めよ。



解答　順に　10π cm，$50(\pi-\sqrt{3})$ cm^2

図のように A，B，C を定め，弧 AB の長さを l とすると　$l=10\cdot\frac{\pi}{3}$ (cm)



よって，求める周の長さは

$3l=3\cdot 10\cdot\frac{\pi}{3}=10\pi$ (cm)

次に，扇形 ABC の面積を S とすると　$S=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{\pi}{3}$

また △ABC$=S'$ とすると　$S'=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\sqrt{3}$

よって，求める面積は

$$3S-2S'=3\left(\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{\pi}{3}\right)-2\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\sqrt{3}\right)=50(\pi-\sqrt{3})\ (\text{cm}^2)$$

２．次の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{65}{6}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$　　(3)　$\tan\frac{14}{3}\pi$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

解答　(1)　$\frac{1}{2}$　　(2)　$-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$-\sqrt{3}$　　(4)　0

(1)　$\sin\frac{65}{6}\pi=\sin\left(\frac{5}{6}\pi+10\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)=\cos\frac{11}{4}\pi=\cos\left(\frac{3}{4}\pi+2\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\frac{14}{3}\pi=\tan\left(\frac{2}{3}\pi+4\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\pi$

$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(4)　$\cos(\pi-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)$

$=-\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos\theta-\sin\theta=0$

３．$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$ $(\pi<\theta<2\pi)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$　　(3)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

解答　(1)　$-\frac{3}{8}$　　(2)　$-\frac{8}{3}$　　(3)　$-\frac{5\sqrt{7}}{16}$

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{1}{4}-1\right)\div 2=-\frac{3}{8}$

(2)　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=1\div\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{8}{3}$

(3)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$　……①

ここで　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

$\pi<\theta<2\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

これと (1) の結果から　$\cos\theta>0$

よって　$\sin\theta-\cos\theta<0$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

したがって，① から

$$\sin^3\theta-\cos^3\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}\left(1-\frac{3}{8}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{5}{8}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

４．$0\leqq x<2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ を解け。

(2)　関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=\frac{5}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$　　(2)　$x=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2

(1)　左辺を変形して　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

ゆえに　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$　　よって　$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(2)　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

よって，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ がとる値の範囲は　$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-2\leqq y\leqq 2$

また，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$　のとき，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ から　$x=\frac{7}{6}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 -2

5．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$　　　(2)　$\sin 2\theta > \cos\theta$

解答　(1)　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

(1)　$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を方程式に代入して整理すると

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

よって　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

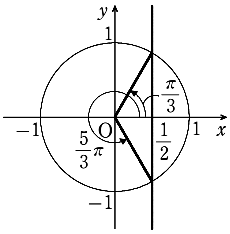
ゆえに　$\cos\theta = 1$　または　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\cos\theta = 1$　のとき　$\theta = 0$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$



(2)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を不等式に代入すると

$2\sin\theta\cos\theta > \cos\theta$

よって　$\cos\theta(2\sin\theta - 1) > 0$

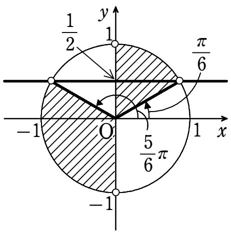
ゆえに　$\cos\theta > 0,\ \sin\theta > \dfrac{1}{2}$

または

$\cos\theta < 0,\ \sin\theta < \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$



6．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解答　(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{5}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi,\ \dfrac{29}{24}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{24} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{29}{24}\pi$

(1)　$2\theta - \dfrac{\pi}{4} = t$　…… ① とおくと　$\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

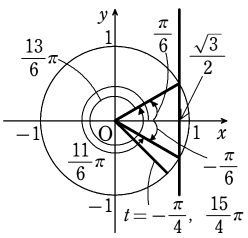
$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{15}{4}\pi$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq t < \dfrac{15}{4}\pi$　…… ②

② の範囲で，$\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の解は

$t = -\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

① より，$\theta = \dfrac{t + \dfrac{\pi}{4}}{2}$　…… ③ であるから　$\theta = \dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{5}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi,\ \dfrac{29}{24}\pi$



(2)　① のおき換えにより

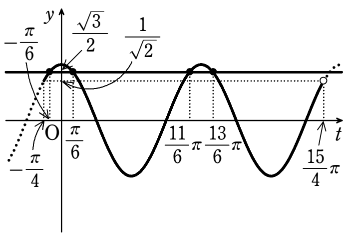
$\cos t \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　…… ④

② の範囲で，④ を満たす t の値の範囲は

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi \leqq t \leqq \dfrac{13}{6}\pi$

よって，③ から

$\dfrac{\pi}{24} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{29}{24}\pi$



7．$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

解答　$\sin 2\theta = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6}$，$\cos 3\theta = -\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$

条件から　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\cos\theta = \dfrac{2}{3}\cos\theta$

ここで，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より　$\cos\theta < 0$

よって　$\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin 2\theta = \dfrac{2}{3} \cdot \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

次に　$\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos\theta}{2} = \dfrac{1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{6}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$

よって　$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{6}} = \dfrac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6}$

また　$\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta = -3 \cdot \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 4\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3 = -\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$

8．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$

解答　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

与式から　$(\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \sin 3\theta = 0$

ここで　$\sin 2\theta + \sin 4\theta = 2\sin\dfrac{2\theta + 4\theta}{2}\cos\dfrac{2\theta - 4\theta}{2} = 2\sin 3\theta\cos(-\theta)$

よって　$2\sin 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta = 0$

すなわち　$\sin 3\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

したがって　$\sin 3\theta = 0$ または $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

[1]　$\sin 3\theta = 0$ のとき

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ から　$0 \leqq 3\theta \leqq 3\pi$　ゆえに　$3\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

[2]　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ から　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

[1]，[2] から　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

9．a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。

(2)　この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

解答　(1)　$-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1$

(2)　$a < -\dfrac{5}{4}$ のとき 0 個，$a = -\dfrac{5}{4}$ のとき 2 個，$-\dfrac{5}{4} < a < -1$ のとき 4 個，$a = -1$ のとき 3 個，$-1 < a < 1$ のとき 2 個，$a = 1$ のとき 1 個，$1 < a$ のとき 0 個

$\cos\theta = t$ とおくと，方程式は　$(1 - t^2) - t + a = 0$

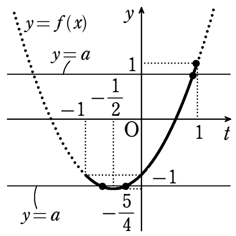
ゆえに　$t^2 + t - 1 = a$　この左辺を $f(t)$ とおく。

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-1 \leqq t \leqq 1$ …… ①

求める条件は，① の範囲で $y = f(t)$ のグラフと $y = a$ のグラフが共有点をもつ条件である。

$f(t) = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$ であるから，右の図より

$-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1$



(2)　$t = -1$ のとき　$\theta = \pi$，$t = 1$ のとき　$\theta = 0$

$-1 < t < 1$ のとき $\cos\theta = t$ を満たす θ は 2 個ある。

よって，$y = f(t)$ のグラフと $y = a$ のグラフの共有点の t の値に注意して，方程式の解の個数を調べると

$a < -\dfrac{5}{4}$ のとき 0 個，$a = -\dfrac{5}{4}$ のとき 2 個，$-\dfrac{5}{4} < a < -1$ のとき 4 個，

$a = -1$ のとき 3 個，$-1 < a < 1$ のとき 2 個，$a = 1$ のとき 1 個，

$1 < a$ のとき 0 個