数学演習（加法定理）Ｈ２３．１．２９　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の値を求めよ。

(1)　$\sin 105^\circ$　　(2)　$\cos 165^\circ$　　(3)　$\tan 195^\circ$

２．$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$とする。$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　　(2)　$\sin\beta$　　(3)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha+\beta)$

３．$0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos 2x-2\sin x-1$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

４．次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$-\sin\theta+\cos\theta$　　(3)　$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$

５．$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$　　(2)　$\sin x+\cos x\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

６．$0\leqq x\leqq\pi$とする。関数 $y=-\sin x+\cos x$ の最大値，最小値とそのときのxの値を求めよ。

数学演習（加法定理）Ｈ２３．１．２９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1． 次の値を求めよ。

(1) $\sin 105^\circ$　　(2) $\cos 165^\circ$　　(3) $\tan 195^\circ$

解答　(1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3) $2-\sqrt{3}$

解説

(1) $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos 165^\circ=\cos(120^\circ+45^\circ)=\cos 120^\circ\cos 45^\circ-\sin 120^\circ\sin 45^\circ$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\tan 195^\circ=\tan(150^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 150^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 150^\circ\tan 45^\circ}=\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 1}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

注意　$\tan(135^\circ+60^\circ)$ として計算してもよい。

2． $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$とする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\alpha$　　(2) $\sin\beta$　　(3) $\sin(\alpha-\beta)$　　(4) $\cos(\alpha+\beta)$

解答　(1) $-\dfrac{4}{5}$　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(3) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$　(4) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解説

(1) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$

(2) $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\sin\beta>0$ であるから　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

(4) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

3． $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos 2x-2\sin x-1$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$；$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -4

解説

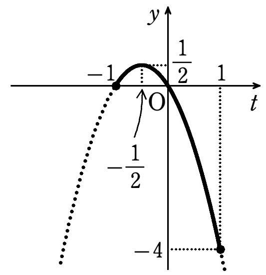
$y=\cos 2x-2\sin x-1=(1-2\sin^2 x)-2\sin x-1$

$\quad=-2\sin^2 x-2\sin x$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq 1$　…… ①

y を t の式で表すと

$$y=-2t^2-2t=-2(t^2+t)$$
$$=-2\left\{t^2+t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$



① の範囲において，y は

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$

$t=1$ のとき最小値 -4

をとる。$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ より　　$x=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

$t=1$ となるのは，　$\sin x=1$ より　　$x=\dfrac{\pi}{2}$

のときである。

よって　$x=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$；$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -4

4． 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\cos\theta$　　(3) $\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$

解答　(1) $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$　(3) $2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

解説

(1) 右の図のように，点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ をとると

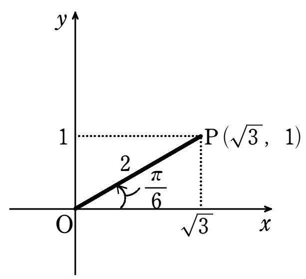
$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α と

すると　$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



(2) 右の図のように，点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ をとると

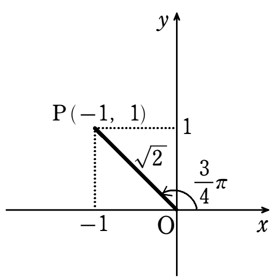
$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α と

すると　$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$



(3) 右の図のように，点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ -\sqrt{6})$ をとると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$

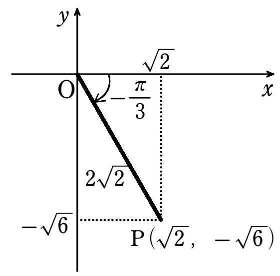
x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α と

すると　$\sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$



5． $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$　　(2) $\sin x+\cos x\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解答　(1) $x=\dfrac{5}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$　(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi\leqq x<2\pi$

解説

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

であるから，方程式は

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$$

よって　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　…… ①

また，$0\leqq x<2\pi$ から

$$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，① から

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$$

よって　$x=\dfrac{5}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(2) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

であるから，不等式は

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$　…… ①

また，$0\leqq x<2\pi$ から

$$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，① から

$$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad \frac{13}{6}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$$

よって　$0\leqq x\leqq\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi\leqq x<2\pi$

６．$0 \leqq x \leqq \pi$とする。関数 $y=-\sin x+\cos x$ の最大値，最小値とそのときのxの値を求めよ。

解答　$x=0$　のとき　最大値　1　　$x=\dfrac{3}{4}\pi$　のとき　最小値　-2

解説

$-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$より$\dfrac{3}{4}\pi \leqq x+\dfrac{3}{4}\pi \leqq \dfrac{7}{4}\pi$

図より，$\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$は

$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi$　のとき　最大値　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$　のとき　最小値　-1

よって　$y=2\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$は

$x=0$　のとき　最大値　1

$x=\dfrac{3}{4}\pi$　のとき　最小値　-2

をとる。