数学演習（三角関数）Ｈ２２．７．２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

１．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\cos\theta > \frac{1}{2}$　　(3) $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$

２．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $2\cos\theta + \sqrt{3} \leqq 0$　　(4) $\tan\theta + 1 > 0$

３．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta = 1$　　(2) $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 1 = 0$

４．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\cos\theta + 2\sin^2\theta < 1$　　(2) $\sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin\theta \geqq 0$

５．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$　　(4) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq -\frac{1}{2}$

6．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta - 5\cos\theta + 1 = 0$

(2)　$2\cos^2\theta - \sin\theta + 1 > 0$

7．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 1$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(2)　$y = -\sin^2\theta - \cos\theta$　$\left(\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$

8．$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする。$\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$

(2)　$\sin\beta$

(3)　$\sin(\alpha - \beta)$

(4)　$\cos(\alpha + \beta)$

数学演習（三角関数）Ｈ２２．７．２　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　）

1．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin\theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta \geqq \sqrt{3}$

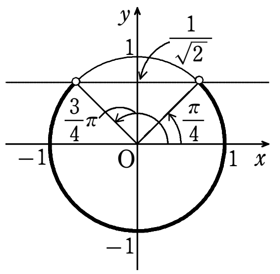
解答　(1)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < 2\pi$　　(2)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

(3)　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{4}{3}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

解説

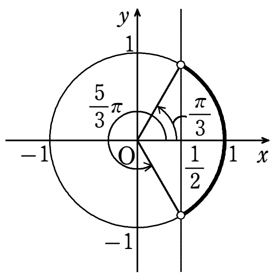
(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解は　　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < 2\pi$



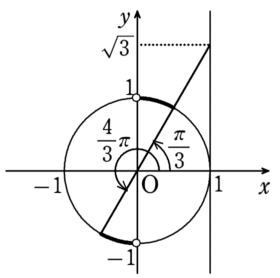
(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の解は　　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$



(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ の解は　　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{4}{3}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$



2．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin\theta = -\sqrt{3}$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3)　$2\cos\theta + \sqrt{3} \leqq 0$　　(4)　$\tan\theta + 1 > 0$

解答　(1)　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$　　(2)　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$　　(3)　$\dfrac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi$

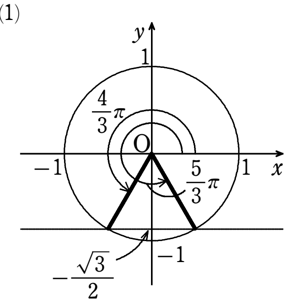
(4)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

解説

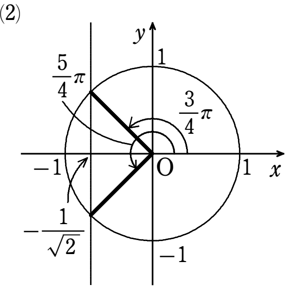
(1)　$2\sin\theta = -\sqrt{3}$ から　　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　図から　　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$

(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$ から　　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　図から　　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$

(1)



(2)

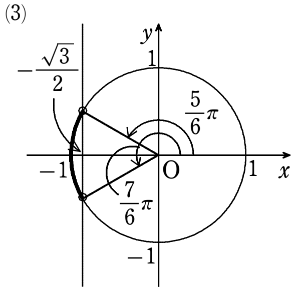


(3)　$2\cos\theta + \sqrt{3} \leqq 0$ から　　$\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の解は　　$\theta = \dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi$

(3)

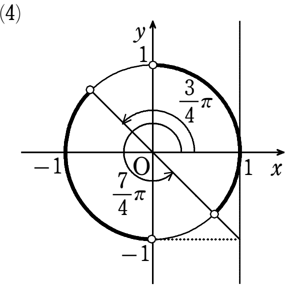


(4)　$\tan\theta + 1 > 0$ から　　$\tan\theta > -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = -1$ の解は　　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

(4)



3．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta + \cos\theta = 1$　　(2)　$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 1 = 0$

解答　(1)　$\theta = 0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから，方程式は　　$2(1-\cos^2\theta) + \cos\theta = 1$

整理して　　$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

ゆえに　　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

よって　　$\cos\theta = 1$，$-\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，両方適する

$\cos\theta = 1$　　より　　$\theta = 0$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ より　　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

したがって，解は　　$\theta = 0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

(2)　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから，方程式は　　$2(1-\sin^2\theta) - \sqrt{3}\sin\theta + 1 = 0$

整理して　　$2\sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 3 = 0$

したがって　　$(\sin\theta + \sqrt{3})(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

解いて　　$\sin\theta = -\sqrt{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　より　$\sin\theta = -\sqrt{3}$　は不適

すなわち　　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

4．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\cos\theta + 2\sin^2\theta < 1$　　(2)　$\sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin\theta \geqq 0$

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから，不等式は　　$\cos\theta + 2(1-\cos^2\theta) < 1$

整理して　　$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 > 0$

ゆえに　　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) > 0$

解いて　　$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta > 1$

$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$ を解くと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\theta > 1$　となるθは存在しない

(2)　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから，不等式は　　$\sin^2\theta - (1-\sin^2\theta) + \sin\theta \geqq 0$

整理して　　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 \geqq 0$

ゆえに　　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geqq 0$

解いて　　$\sin\theta \leqq -1$，$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，$\sin\theta \leqq -1$ より　　$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$　より　　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$

よって，解は　　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

5．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)>1$　　(4) $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq-\frac{1}{2}$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$　(2) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$　(4) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

解説

(1) $\theta-\frac{\pi}{3}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}$ より

$-\frac{\pi}{3}\leqq x<2\pi-\frac{\pi}{3}$

すなわち $-\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{5}{3}\pi$ …… ①

① の範囲で，$\sin x=-\frac{1}{2}$ を解くと $x=-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

よって $\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ であるから $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$

(2) $2\theta+\frac{\pi}{3}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $0\leqq2\theta<4\pi$ より

$\frac{\pi}{3}\leqq2\theta+\frac{\pi}{3}<4\pi+\frac{\pi}{3}$ より $\frac{\pi}{3}\leqq x<4\pi+\frac{\pi}{3}$

すなわち $\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{13}{3}\pi$ …… ①

① の範囲で，$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$ であるから $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3) $\theta-\frac{\pi}{6}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<2\pi-\frac{\pi}{6}$ より

$-\frac{\pi}{6}\leqq x<2\pi-\frac{\pi}{6}$ すなわち $-\frac{\pi}{6}\leqq x<\frac{11}{6}\pi$ …… ①

① の範囲で，$\tan x>1$ を解くと $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

すなわち $\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{3}{2}\pi$

各辺に $\frac{\pi}{6}$ を加えて $\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

(4) $2\theta+\frac{\pi}{6}=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $0\leqq2\theta<4\pi$ より

$\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{\pi}{6}$ つまり $\frac{\pi}{6}\leqq x<4\pi+\frac{\pi}{6}$

すなわち $\frac{\pi}{6}\leqq x<\frac{25}{6}\pi$ …… ①

① の範囲で，$\sin x\leqq-\frac{1}{2}$ を解くと $\frac{7}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{23}{6}\pi$

すなわち $\frac{7}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{23}{6}\pi$

各辺から $\frac{\pi}{6}$ を引いて，$\pi\leqq2\theta\leqq\frac{5}{3}\pi,\ 3\pi\leqq2\theta\leqq\frac{11}{3}\pi$

2 で割ると $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

6．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta-5\cos\theta+1=0$　　(2) $2\cos^2\theta-\sin\theta+1>0$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$

解説

(1) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから，方程式は $2(1-\cos^2\theta)-5\cos\theta+1=0$

整理して $2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0$

ゆえに $(\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)=0$ …… ①

解いて $\cos\theta=-3,\ \frac{1}{2}$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より $\cos\theta=-3$ は不適　すなわち $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから，不等式は $2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta+1>0$

整理して $2\sin^2\theta+\sin\theta-3<0$

ゆえに $(\sin\theta-1)(2\sin\theta+3)<0$

解いて $-\frac{3}{2}<\sin\theta<1$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$

7．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2) $y=-\sin^2\theta-\cos\theta$ $\left(\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 3，$\theta=\pi$ のとき最小値 0

(2) $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

解説

(1) 関数 $y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ のについて

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$

よって $-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

ゆえに 2倍して $-1\leqq2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq2$

1足して $0\leqq2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1\leqq3$ より y は

最大値 3，最小値 0 である。

ここで最大となるのは $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ のとき

最小となるのは $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ のとき

以上より

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 3，

$\theta=\pi$ のとき最小値 0

をとる。

(2) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$y=-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=\cos^2\theta-\cos\theta-1$

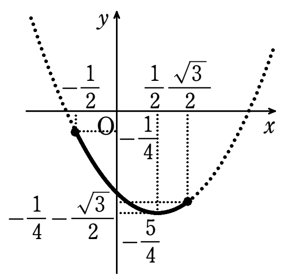
$\cos\theta=x$ とおくと，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ であるから $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

y を x の式で表すと

$y=x^2-x-1$

$=\left\{x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



① の範囲において，y は

$x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

をとる。

また，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ であるから

$x=-\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より $\theta=\frac{2}{3}\pi$

$x=\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より $\theta=\frac{\pi}{3}$

のときである。

よって，$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $-\frac{1}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$

8．$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\alpha$　(2) $\sin\beta$　(3) $\sin(\alpha-\beta)$　(4) $\cos(\alpha+\beta)$

解答 (1) $-\frac{4}{5}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(3) $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$　(4) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解説

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ から

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1$ から $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$ より $\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$

よって $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

(2) $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ から

$\sin^2\beta+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=1$ から $\sin^2\beta=\frac{1}{5}$ より $\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\sin\beta>0$ であるから $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(3) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{2\sqrt{5}}{25}$

(4) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$