数学演習（三角関数）Ｈ２２．６．２５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．α の動径が第 1 象限，β の動径が第 2 象限にあり，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\sin(\alpha-\beta)$

(3)　$\cos(\alpha+\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

(5)　$\tan(\alpha+\beta)$　　(6)　$\tan(\alpha-\beta)$

２．$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ とする。$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　　(2)　$\sin 2\alpha$　　(3)　$\cos 2\alpha$

３．$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ とする。$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan 2\alpha$　　(2)　$\cos\alpha$，$\sin\alpha$　　(3)　$\sin 2\alpha$　　(4)　$\cos 2\alpha$

４．次の 2 直線の作る角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ<\theta<90^\circ$ とする。

$2x+y+1=0$，$x+3y+6=0$

５．半角の公式を使って，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{\pi}{12}$　　(2)　$\cos\dfrac{5}{8}\pi$　　(3)　$\tan\dfrac{3}{8}\pi$

６．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos 2\theta+\sin\theta=0$　　(2)　$\sin 2\theta=\cos\theta$

7．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta \leqq \sin\theta$　　　(2)　$\sin 2\theta < \sqrt{3}\cos\theta$

8．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

$\sin 2\theta + \sin\theta > 0$

9．$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。関数 $y = 4\sin\theta - \cos 2\theta + 3$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

10. 次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r > 0$，$-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　　(2)　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

(3)　$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$　　　(4)　$\sin\theta + \cos\theta$

(5)　$\sin\theta - \cos\theta$

11. 次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r > 0$，$-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1)　$-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　　(2)　$-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

(3)　$-\sin\theta + \cos\theta$　　　(4)　$-\sin\theta - \cos\theta$

12. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$　　　(2)　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

1．α の動径が第１象限，β の動径が第２象限にあり，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\sin(\alpha-\beta)$

(3)　$\cos(\alpha+\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

(5)　$\tan(\alpha+\beta)$　　(6)　$\tan(\alpha-\beta)$

解答　(1)　0　(2)　$-\frac{24}{25}$　(3)　-1　(4)　$\frac{7}{25}$　(5)　0　(6)　$-\frac{24}{7}$

解説

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

α の動径が第１象限にあるから　$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

β の動径が第２象限にあるから　$\cos\beta<0$

よって　$\cos\beta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=0$

(2)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}$

(3)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{25}{25}=-1$

(4)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7}{25}$

(5)　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}\div\frac{3}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{4}{5}\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\left\{\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}\div\left\{1-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}=0$

別解　(1)，(3) の結果を利用して

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{0}{-1}=0$

(6)　$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\left\{\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}\div\left\{1+\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}$

$=\frac{8}{3}\div\left(-\frac{7}{9}\right)=\frac{8}{3}\times\left(-\frac{9}{7}\right)=-\frac{24}{7}$

別解　(2)，(4) の結果を利用して

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\left(-\frac{24}{25}\right)\div\frac{7}{25}=\left(-\frac{24}{25}\right)\times\frac{25}{7}=-\frac{24}{7}$

2．$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ とする。$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　　(2)　$\sin2\alpha$　　(3)　$\cos2\alpha$

解答　(1)　$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(2)　$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　(3)　$\frac{7}{9}$

解説

(1)　$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから

$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(2)　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(3)　$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$

3．$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ とする。$\tan\alpha=\frac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan2\alpha$　　(2)　$\cos\alpha$，$\sin\alpha$　　(3)　$\sin2\alpha$　　(4)　$\cos2\alpha$

解答　(1)　$-\frac{24}{7}$　(2)　$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$　(3)　$\frac{24}{25}$　(4)　$-\frac{7}{25}$

解説

(1)　$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\frac{24}{7}$

(2)　$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{25}{9}}=\frac{9}{25}$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから

$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}$

(3)　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$

(4)　$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$

4．次の２直線の作る角 θ を求めよ。ただし，$0°<\theta<90°$ とする。

$2x+y+1=0$，$x+3y+6=0$

解答　$\theta=45°$

解説

２直線 $2x+y+1=0$，$x+3y+6=0$ が x 軸と作る角をそれぞれ α，β とする。

(ただし，$-90°<\alpha<90°$，$-90°<\beta<90°$)

直線 $2x+y+1=0$ の傾きは -2，直線 $x+3y+6=0$ の傾きは $-\frac{1}{3}$ であるから

$\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$

$-90°<\alpha<\beta<0°$ から

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{-\frac{1}{3}-(-2)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-2)}=1$

よって　$\theta=45°$

5．半角の公式を使って，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{\pi}{12}$　　(2)　$\cos\frac{5}{8}\pi$　　(3)　$\tan\frac{3}{8}\pi$

解答　(1)　$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$　$\left(=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$　(2)　$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(3)　$\sqrt{2}+1$

解説

(1)　$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}>0$ であるから

$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$　$\left(=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

参考　$a>0$，$b>0$ のとき $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$ のとき　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

よって　$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{4}$

$=\frac{\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot2}}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2)　$\cos^2\frac{5}{8}\pi=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{5}{8}\pi<0$ であるから

$\cos\frac{5}{8}\pi=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(3)　$\tan^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$

$\tan\frac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$

6．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\cos 2\theta+\sin\theta=0$　　(2) $\sin 2\theta=\cos\theta$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　　(2) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

解説

(1) $\cos 2\theta+\sin\theta=0$ より $(1-2\sin^2\theta)+\sin\theta=0$

整理すると　$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$

因数分解して　$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=-\frac{1}{2},\ 1$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ から　$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\sin\theta=1$ から　$\theta=\frac{\pi}{2}$

したがって　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(2) $\sin 2\theta=\cos\theta$ より $2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

整理すると　$2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta=0$

因数分解して　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\cos\theta=0$　または　$\sin\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\cos\theta=0$ から　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ から　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

7．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta\leqq\sin\theta$　　(2) $\sin 2\theta<\sqrt{3}\cos\theta$

解答 (1) $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi$　　(2) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1) $\cos 2\theta\leqq\sin\theta$ より $1-2\sin^2\theta\leqq\sin\theta$

整理すると　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq0$

因数分解して　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)\geqq0$

$\sin\theta+1\geqq0$ であるから

$\sin\theta+1=0$　または　$2\sin\theta-1\geqq0$

すなわち

$\sin\theta=-1$　または　$\sin\theta\geqq\frac{1}{2}$

よって　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi$

(2) $\sin 2\theta<\sqrt{3}\cos\theta$ より $2\sin\theta\cos\theta<\sqrt{3}\cos\theta$

整理すると　$2\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\cos\theta<0$

因数分解して　$\cos\theta(2\sin\theta-\sqrt{3})<0$

よって　$\cos\theta<0$ かつ $2\sin\theta-\sqrt{3}>0$

または　$\cos\theta>0$ かつ $2\sin\theta-\sqrt{3}<0$

$\cos\theta<0$ かつ $2\sin\theta-\sqrt{3}>0$ を解くと

$\cos\theta<0$ から　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$

よって　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2}{3}\pi$

$\cos\theta>0$ かつ $2\sin\theta-\sqrt{3}<0$ を解くと

$\cos\theta>0$ から　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi<\theta<2\pi$

よって　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

以上より　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

8．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

$\sin 2\theta+\sin\theta>0$

解答　$0<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

解説

$2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta>0$ から　$\sin\theta(2\cos\theta+1)>0$

よって

$\sin\theta>0$　かつ　$\cos\theta>-\frac{1}{2}$

または

$\sin\theta<0$　かつ　$\cos\theta<-\frac{1}{2}$

したがって　$0<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

9．$0\leqq\theta<2\pi$ とする。関数 $y=4\sin\theta-\cos 2\theta+3$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 8，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 0

解説

$y=4\sin\theta-\cos 2\theta+3$

$=4\sin\theta-(1-2\sin^2\theta)+3$

$=2\sin^2\theta+4\sin\theta+2$

$\sin\theta=x$ とおくと　$-1\leqq x\leqq1$

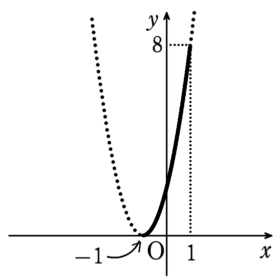
このとき　$y=2x^2+4x+2=2(x+1)^2$

ここで，$-1\leqq x\leqq1$ であるから

$x=1$ のとき最大値 8，$x=-1$ のとき最小値 0

$x=1$ のとき $\theta=\frac{\pi}{2}$，$x=-1$ のとき $\theta=\frac{3}{2}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 8，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 0



10．次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0,\ -\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

(3) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(4) $\sin\theta+\cos\theta$

(5) $\sin\theta-\cos\theta$

解答 (1) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$　(2) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$　(3) $2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　(4) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　(5) $\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

解説

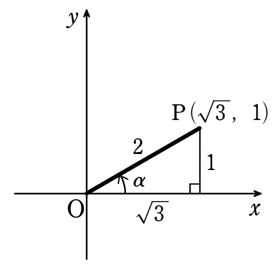
(1) $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ であるから

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha=\frac{1}{2}$

を満たす α は　$\alpha=\frac{\pi}{6}$

よって　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$



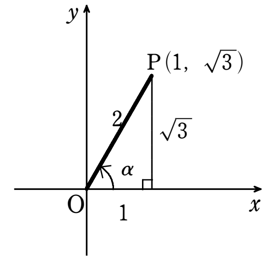
(2) $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ であるから

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

を満たす α は　$\alpha=\frac{\pi}{3}$

よって　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$



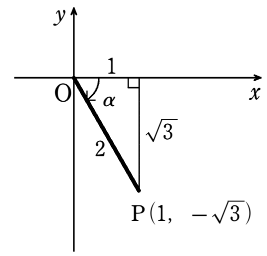
(3) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ であるから

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

を満たす α は　$\alpha=-\frac{\pi}{3}$

よって　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$



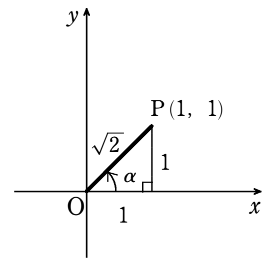
(4) $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

を満たす α は　$\alpha=\frac{\pi}{4}$

よって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$



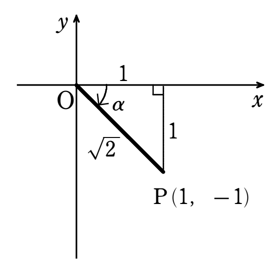
(5) $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ であるから

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

を満たす α は　$\alpha=-\frac{\pi}{4}$

よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$



11. 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

(3)　$-\sin\theta+\cos\theta$　　(4)　$-\sin\theta-\cos\theta$

解答　(1)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(2)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(3)　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

(4)　$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{3}{4}\pi\right)$

解説

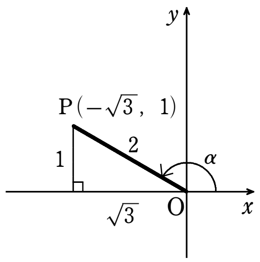
(1)　$\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ であるから

$-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

を満たす α は　$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$



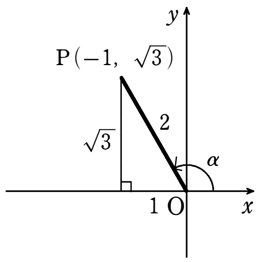
(2)　$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ であるから

$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

を満たす α は　$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$



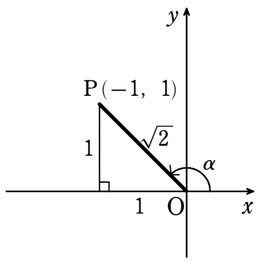
(3)　$\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

を満たす α は　$\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$



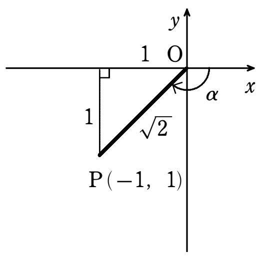
(4)　$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ であるから

$-\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

を満たす α は　$\alpha=-\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{3}{4}\pi\right)$



12. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$　　(2)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$

解答　(1)　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi$　　(2)　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$ から　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

よって　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi$

(2)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$ から

$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$

よって　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$