数学演習（三角関数）Ｈ２２．６．２４　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1．次の角の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

(1)　$75°$　　(2)　$15°$

2．$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

3．2 直線 $3x-y+1=0$，$x-2y+4=0$ のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

4．$0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

5．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$ を解け。

6．$105°=60°+45°$ であることを用いて，$\sin 105°$，$\cos 105°$，$\tan 105°$ の値をそれぞれ求めよ。

7．(1)　195° の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であることを用いて，$\dfrac{11}{12}\pi$ の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

8．$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

9．2 直線 $x-y-3=0$，$(2+\sqrt{3})x+y+1=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

10. 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{3}{8}\pi$　　(2)　$\cos\dfrac{3}{8}\pi$　　(3)　$\tan\dfrac{3}{8}\pi$

11. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos2\theta$，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\sin3\theta$ の値を求めよ。

数学演習（三角関数）Ｈ２２．６．２４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の角の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

(1)　75°　　　(2)　15°

解答　(1)　$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$

(2)　$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$

解説

(1)　$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=2+\sqrt{3}$$

(2)　$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\left(1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

2．$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\sin(\alpha+\beta)=0$，$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{7}{25}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{24}{7}$

解説

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\alpha>0$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　　$\sin\beta>0$

よって　　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{7}{25}$$

また　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$$

よって　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$$=\left(-\frac{24}{25}\right)\div\left(-\frac{7}{25}\right)=\frac{24}{7}$$

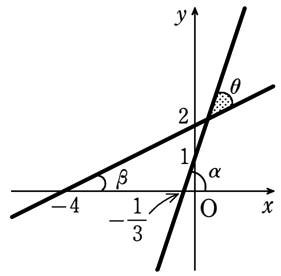
3．2直線 $3x-y+1=0$，$x-2y+4=0$ のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

解説

2直線の方程式を変形すると

$y=3x+1$，$y=\dfrac{1}{2}x+2$



図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。

$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\left(3-\frac{1}{2}\right)\div\left(1+3\cdot\frac{1}{2}\right)=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

4．$0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\pi$ で最大値3；$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$

解説

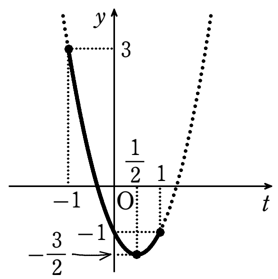
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$ であるから

$y=(2\cos^2 x-1)-2\cos x=2\cos^2 x-2\cos x-1$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t で表すと

$$y=2t^2-2t-1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$



$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，y は

$t=-1$ で最大値 3,

$t=\dfrac{1}{2}$　で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-1$ となるとき，$\cos x=-1$ から　$x=\pi$

$t=\dfrac{1}{2}$　となるとき，$\cos x=\dfrac{1}{2}$　から　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって，この関数は $x=\pi$ で最大値3，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

5．$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$ を解け。

解答　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

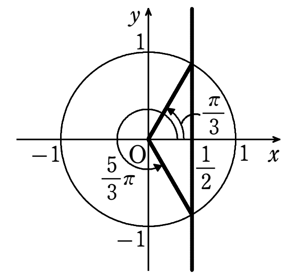
解説

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を方程式に代入して整理すると

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

よって　　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$

ゆえに　　$\cos\theta=1$　または　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=1$　のとき　　$\theta=0$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　のとき　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって　　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

6．$105^\circ=60^\circ+45^\circ$ であることを用いて，$\sin 105^\circ$，$\cos 105^\circ$，$\tan 105^\circ$ の値をそれぞれ求めよ。

解答　$\sin 105^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，$\tan 105^\circ=-2-\sqrt{3}$

解説

$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$

$$=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{4+2\sqrt{3}}{1-3}$$

$$=-2-\sqrt{3}$$

7. (1) 195° の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

(2) $\frac{11}{12}\pi=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}$ であることを用いて，$\frac{11}{12}\pi$ の正弦・余弦・正接の値を求めよ。

解答 (1) $\sin 195^\circ=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 195^\circ=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 195^\circ=2-\sqrt{3}$

(2) $\sin\frac{11}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\frac{11}{12}\pi=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan\frac{11}{12}\pi=-2+\sqrt{3}$

解説

(1) $\sin 195^\circ=\sin(60^\circ+135^\circ)=\sin 60^\circ\cos 135^\circ+\cos 60^\circ\sin 135^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 195^\circ=\cos(60^\circ+135^\circ)=\cos 60^\circ\cos 135^\circ-\sin 60^\circ\sin 135^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 195^\circ=\tan(60^\circ+135^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 135^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 135^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

別解 $\tan 195^\circ=\frac{\sin 195^\circ}{\cos 195^\circ}=\frac{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

(2) $\sin\frac{11}{12}\pi=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{11}{12}\pi=\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{11}{12}\pi=\tan\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{2}{3}\pi+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{2}{3}\pi\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}}=\frac{-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-2+\sqrt{3}$$

別解 $\tan\frac{11}{12}\pi=\frac{\sin\frac{11}{12}\pi}{\cos\frac{11}{12}\pi}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$

$$=-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-2+\sqrt{3}$$

8. $\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\beta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{-2\sqrt{6}+1}{6}$，

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{8\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{23}$

解説

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\alpha>0$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　$\cos\beta<0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{-2\sqrt{6}+1}{6}$$

また　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

よって　$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\div\frac{-2\sqrt{6}+1}{6}$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)}=\frac{8\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{23}$$

別解 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

よって　$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}\div\left\{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{23}$$

9. 2 直線 $x-y-3=0$，$(2+\sqrt{3})x+y+1=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

解答 $\theta=\frac{\pi}{3}$

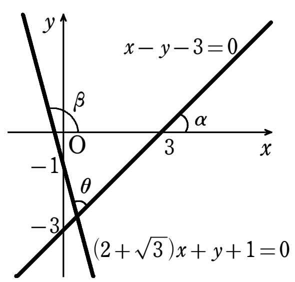
解説

2 直線の方程式を変形すると

$y=x-3$

$y=-(2+\sqrt{3})x-1$

図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\beta-\alpha$ である。



$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=-(2+\sqrt{3})$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{-(2+\sqrt{3})-1}{1+\{-(2+\sqrt{3})\}\cdot 1}=\frac{-3-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$

10. 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{3}{8}\pi$　　(2) $\cos\frac{3}{8}\pi$　　(3) $\tan\frac{3}{8}\pi$

解答 (1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(3) $\sqrt{2}+1$

解説

(1) $\sin^2\frac{3}{8}\pi=\sin^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2}$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\sin\frac{3}{8}\pi=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(2) $\cos^2\frac{3}{8}\pi=\cos^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2}$

$$=\frac{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\cos\frac{3}{8}\pi=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(3) $\tan^2\frac{3}{8}\pi=\tan^2\frac{\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=(\sqrt{2}+1)^2$$

$\tan\frac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$

別解 (1)，(2) から

$$\tan\frac{3}{8}\pi=\frac{\sin\frac{3}{8}\pi}{\cos\frac{3}{8}\pi}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

11. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{9}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，$\sin 3\theta=\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$

解説

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{9}$$

次に　$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}=\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

ゆえに　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{5}{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

また　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^3=\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$