２年５･６･７組　数学　統一テスト　～三角関数～　H20/11/13

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式または不等式を解け。

(1) $2\cos\theta = \sqrt{3}$

(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

(3) $2\sin^2\theta + \cos\theta = 2$

(4) $\sin 2\theta = \cos\theta$

(5) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

(6) $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{3}$

(7) $\cos\theta > \frac{1}{2}$

(8) $\cos\theta + 2\sin^2\theta < 1$

(9) $\sin\theta + \cos 2\theta \geqq 0$

(10) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \leqq -1$

$\boxed{2}$ 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

半径 12，中心角 $\frac{7}{6}\pi$

$\boxed{3}$ 次の２直線のなす鋭角を求めよ。（ただし，弧度法を用いて答えること）

$x - y = 0$，$y = (2 - \sqrt{3})x$

$\boxed{4}$ α は鈍角，β は鋭角とする。次の値を求めよ。

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{5}$ のとき　$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$

$\boxed{5}$ 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

$y=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)+1$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\boxed{6}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，関数 $y=-\cos2\theta+2\cos\theta+3$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

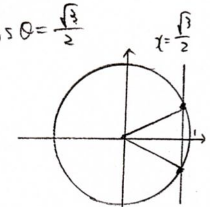
1 各6点 ×10　　2～6 各8点 ×5

(　　)組(　　)番　名前(　　解答　　)

1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式または不等式を解け。

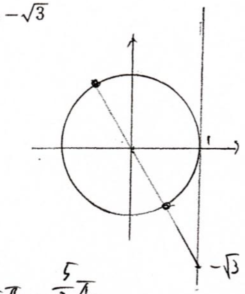
(1) $2\cos\theta = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$



$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

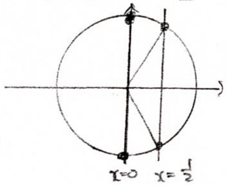
(3) $2\sin^2\theta + \cos\theta = 2$

$2(1-\cos^2\theta) + \cos\theta = 2$

$2\cos^2\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\cos\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0,\ \frac{1}{2}$　2



$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

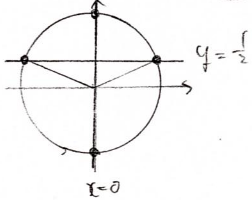
一方のみ 3

(4) $\sin 2\theta = \cos\theta$

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0,\ \sin\theta = \frac{1}{2}$　2



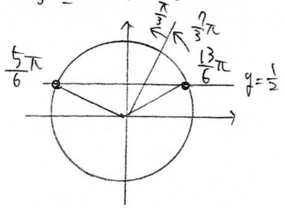
$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

一方のみ 3

(5) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

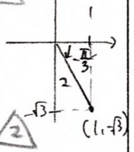
$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$



$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$

(6) $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{3}$

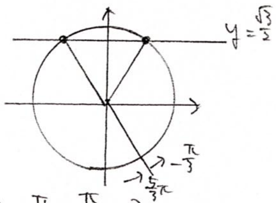


$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$　2

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

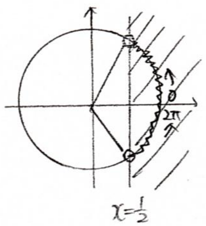
$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

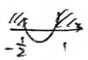


$\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

(7) $\cos\theta > \frac{1}{2}$





$$\begin{cases} 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3} \\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

(8) $\cos\theta + 2\sin^2\theta < 1$

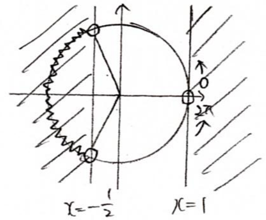
$\cos\theta + 2(1-\cos^2\theta) < 1$

$-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1 < 0$

$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 > 0$

$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) > 0$

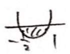
$\cos\theta < -\frac{1}{2},\ 1 < \cos\theta$　2



$\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$

(9) $\sin\theta + \cos 2\theta \geqq 0$

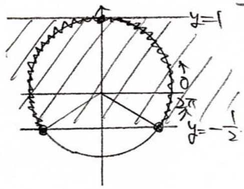
$\sin\theta + (1 - 2\sin^2\theta) \geqq 0$



$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 \leqq 0$

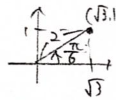
$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) \leqq 0$

$-\frac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq 1$　2



$$\begin{cases} 0 \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi \\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi \end{cases}$$

(10) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \leqq -1$

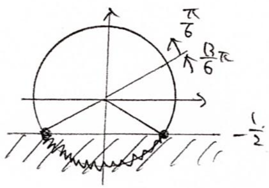


$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq -1$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq -\frac{1}{2}$　2

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{13}{6}\pi$



$\frac{7}{6}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{11}{6}\pi$

$\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$

2 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

半径 12，中心角 $\frac{7}{6}\pi$

$l = 12 \times \frac{7}{6}\pi = 14\pi$

各4点

$S = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \frac{7}{6}\pi = 84\pi$

3 次の2直線のなす鋭角を求めよ。（ただし弧度法を用いて答えること。）

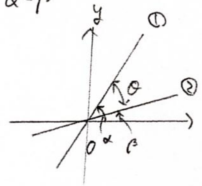
$x - y = 0,\ y = (2-\sqrt{3})x$ …②

$y = x$ …①

①，②と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α, β とし，

①，②のなす鋭角を θ とすると，

$\tan\alpha = 1,\quad \tan\beta = 2-\sqrt{3},\quad \theta = \alpha - \beta$



だから

$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$

$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{1 - (2-\sqrt{3})}{1 + 1 \times (2-\sqrt{3})}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$　5

/76

4 αは鈍角，βは鋭角とする。次の値を求めよ。

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{5}$ のとき　$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$

α:鈍角より　$\cos\alpha<0$
β:鋭角より　$\sin\beta>0$　) 2点

よって $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$　) 2点

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{21}}{5}$

$=\frac{2-2\sqrt{42}}{15}$　) 2点

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{-2\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{5}$

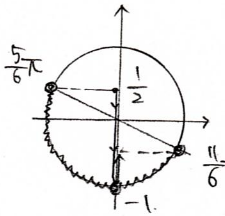
$=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$　) 2点

5 次の関数の最大値と最小値，およびそのときのθの値を求めよ。

$y=2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)+1$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$より

$\frac{5}{6}\pi\leqq\theta+\frac{5}{6}\pi\leqq\frac{11}{6}\pi$　△2



よって

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq\frac{1}{2}$

$-2\leqq2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq1$

$-1\leqq2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)+1\leqq2$

$-1\leqq y\leqq2$　△5

これらのみは5点

したがって

$\theta+\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi$　つまり　$\theta=0$ の時　最大値 2.

$\theta+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$　つまり　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ の時　最小値 -1

6 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，関数 $y=-\cos2\theta+2\cos\theta+3$ の最大値と最小値，およびそのときのθの値を求めよ。

$y=-(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta+3$

$=-2\cos^2\theta+2\cos\theta+4.$　△2

$t=\cos\theta$ とすると

$0\leqq\theta<2\pi$より　$-1\leqq t\leqq1$ ···①

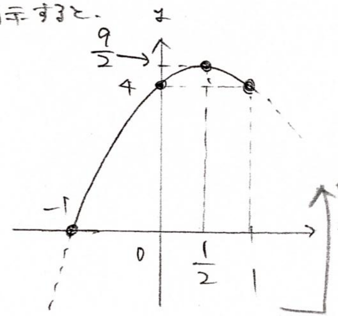
なし -2

$y=-2t^2+2t+4$

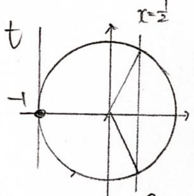
$=-2\left(t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+4$

$=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$.

①の下で，図示すると。



△5



図より

$t=\frac{1}{2}$　つまり　$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi$ のとき　最大値 $\frac{9}{2}$

$t=-1$　つまり　$\theta=\pi$　のとき　最小値 0.

これらのみは5点.