統一テスト（三角関数）Ｈ２０．２．２３　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

１．$\theta=-\dfrac{25}{3}\pi$のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

２．半径が５，中心角が$\dfrac{4}{3}\pi$の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

３．$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$のとき次の値を求めよ。ただし，αは第２象限の角，βは第４象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

４．$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$であるとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\pi<\theta<2\pi$であるとする。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

５．２直線$2x+y-4=0$，$x-2y+3=0$のなす角θを求めよ。ただしθは鋭角とする。

６．$\pi<\alpha<2\pi$とする。$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

(3) $\sin 3\alpha$

７．次の関数において，与えられた定義域における最大値･最小値とそのときのθの値を求めよ。

(1) $y=\cos 2\theta-2\cos\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(2) $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta-1$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

８．次の方程式，不等式を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1) $2\cos^2\theta+2\geqq-7\sin\theta$

(2) $\tan\theta-1<0$

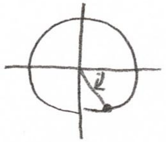
(3) $\sin\left(2\theta+\dfrac{1}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin 4\theta+\sin 2\theta=0$

1．$\theta=-\frac{25}{3}\pi$のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\theta=-\frac{25}{3}\pi$

$=-8\pi-\frac{1}{3}\pi$



$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=-\sqrt{3}$

2．半径が5，中心角が$\frac{4}{3}\pi$の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

$l=r\theta=5\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{20}{3}\pi$

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{20}{3}\pi=\frac{50}{3}\pi$

3．$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$のとき次の値を求めよ。ただし，αは第２象限の角，βは第４象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$．$\cos\alpha<0$ より $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$　$\sin\beta<0$ より $\sin\beta=-\frac{12}{13}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{20+36}{65}=\frac{56}{65}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{15+48}{65}=-\frac{63}{65}$

4．$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$であるとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\pi<\theta<2\pi$であるとする。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

(1)
$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

(2) $\pi<\theta<2\pi$ より $\sin\theta<0$

よって (1) より $\cos\theta>0$

なので $\sin\theta-\cos\theta<0$ …(*)

$(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$
$=1-2\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{5}$

(*) より $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{5}}$

5．２直線$2x+y-4=0$，$x-2y+3=0$のなす角θを求めよ。ただしθは鋭角とする。

それぞれの直線の傾きは

$\begin{cases} y=-2x+4 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$

より -2 と $\frac{1}{2}$ であり

$(-2)\times\frac{1}{2}=-1$

より２直線は直交する

$\therefore\ \theta=90^\circ$

6．$\pi<\alpha<2\pi$とする。$\cos\alpha=\frac{1}{3}$のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin2\alpha$

$\pi<\alpha<2\pi$ より $\sin\alpha<0$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\therefore\ \sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

より $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$=2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$

$\pi<\alpha<2\pi$ より

$\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$

$\therefore\ \cos\frac{\alpha}{2}<0$

よって $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$
$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)$
$=\frac{2}{3}$

より

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

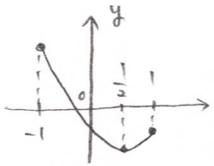
(3) $\sin3\alpha$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
$=3\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-4\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3$
$=-2\sqrt{2}+\frac{32\cdot2\sqrt{2}}{27}=\frac{10\sqrt{2}}{27}$

7．次の関数において，与えられた定義域における最大値･最小値とそのときのθの値を求めよ。

(1) $y=\cos2\theta-2\cos\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

$y=2\cos^2\theta-1-2\cos\theta$
$=2(\cos^2\theta-\cos\theta)-1$
$=2\left\{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-1$
$=2\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

よって

・$\cos\theta=\frac{1}{2}$

つまり $\theta=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

の時 最小値 $-\frac{3}{2}$

・$\cos\theta=-1$

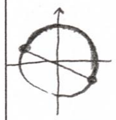
つまり $\theta=\pi$

の時 最大値 3

(2) $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta-1$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)-1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\frac{1}{6}\pi\leqq\theta-\frac{1}{6}\pi\leqq\frac{5}{6}\pi$



$\therefore\ -\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{1}{6}\pi\right)\leqq1$

$-1\leqq2\sin\left(\theta-\frac{1}{6}\pi\right)\leqq2$

より $-2\leqq2\sin\left(\theta-\frac{1}{6}\pi\right)-1\leqq1$

最大は $\theta-\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

最小は $\theta-\frac{1}{6}\pi=-\frac{1}{6}\pi$

$\therefore\ \theta=0$

以上より

最大値 1 $\left(\theta=\frac{2}{3}\pi\right)$

最小値 -2 $(\theta=0)$

8．次の方程式，不等式を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1) $2\cos^2\theta+2\geqq-7\sin\theta$

$2(1-\sin^2\theta)+2+7\sin\theta\geqq0$．

整理して

$2\sin^2\theta-7\sin\theta-4\leqq0$

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-4)\leqq0$

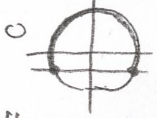
ここで $0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ から

$\sin\theta-4<0$ より

$2\sin\theta+1\geqq0$

$\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$

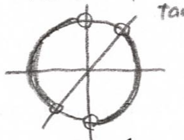


$\therefore$

$0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\leqq\theta<2\pi$

(2) $\tan\theta-1<0$

$\tan\theta<1$



$\therefore\ 0\leqq\theta<\frac{1}{4}\pi$

$\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

(3) $\sin\left(2\theta+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

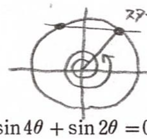
$0\leqq\theta<2\pi$

$0\leqq2\theta<4\pi$

$\frac{1}{3}\pi\leqq2\theta+\frac{1}{3}\pi<4\pi+\frac{1}{3}\pi$

この範囲で $\sin\left(2\theta+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

は



$2\theta+\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,$

$\frac{1}{3}\pi+2\pi,\ \frac{2}{3}\pi+2\pi$

$2\theta=0,\ \frac{1}{3}\pi,\ 2\pi,\ \frac{1}{3}\pi+2\pi$

$\therefore$

$\theta=0,\ \frac{1}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{1}{6}\pi+\pi$

$=0,\ \frac{1}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{7}{6}\pi$

(4) $\sin4\theta+\sin2\theta=0$

和・積の公式より

$\sin4\theta+\sin2\theta$

$=2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}$

$=2\sin3\theta\cos\theta$

よって

$2\sin3\theta\cos\theta=0$

$\Rightarrow\ \sin3\theta=0,\ \cos\theta=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq3\theta<6\pi$

$\therefore$

$3\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,$
$4\pi,\ 5\pi$

より $\theta=0,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

また．$\cos\theta=0$ より $\theta=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

$\therefore$

$\theta=0,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,$
$\frac{5}{3}\pi$