数学演習（図形と方程式）Ｈ２２．５．１８　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．2 円 $x^2+y^2=5$，$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ について

(1)　2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 円の交点と点 (1，3) を通る円の方程式を求めよ。

２．2 円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ。また，2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

３．円 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ に接し，(2，0) を通る直線の方程式を求めよ。

4．円 $x^2+y^2-2x-4=0$ に接し，$(2,3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

5．x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

6．座標平面上で不等式 $x^2+y^2\leqq 2$，$x+y\geqq 0$ で表される領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が A を動くとき，$4x+3y$ の最大値と最小値を求めよ。

1．2 円 $x^2+y^2=5$，$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ について

(1)　2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 円の交点と点 (1，3) を通る円の方程式を求めよ。

解答　(1)　$x+2y-3=0$　　(2)　$4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$

解説

与えられた円を順に ①，② とする。

(1)　$k(x^2+y^2-5)+(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$（$k$ は定数）…… ③ とすると，③ は 2 円 ①，② の交点を通る円，または直線を表す。

③ に $k=-1$ を代入すると

$$-(x^2+y^2-5)+(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$$

整理すると　　$x+2y-3=0$

これは直線を表すから，求める方程式である。

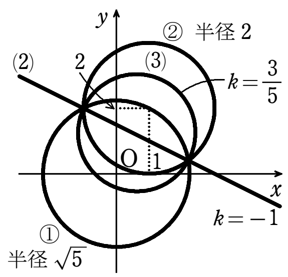
(2)　③ が点 (1，3) を通るとして，③ に $x=1$，$y=3$ を代入して整理すると

$5k-3=0$　　　よって　　$k=\dfrac{3}{5}$

これを ③ に代入して整理すると

$$4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$$

これは円を表すから，求める方程式である。



2．2 円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ。また，2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$5x^2+5y^2-16x-8y=0$，$4x+2y-5=0$

解説

k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-2y+1)+(x^2+y^2-4)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

[1]　図形 ① が原点を通るとき

$k\cdot 1-4=0$　　　よって　　$k=4$

これを ① に代入して整理すると　　$5x^2+5y^2-16x-8y=0$

これが求める円の方程式である。

[2]　図形 ① が直線であるとき

x^2，y^2 の項の係数が 0 となることから　　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　　$4x+2y-5=0$

注意　この解答では，2 円が異なる 2 点で交わることを前提とした。この 2 円の位置関係は，次のようにして確かめられる。

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ を変形すると　　$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

よって，2 円の中心間の距離は　　$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

また，2 円の半径はともに　　2

ここで，$2-2<\sqrt{5}<2+2$ であるから，2 円は異なる 2 点で交わる。

3．円 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ に接し，(2，0) を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x+2$，$y=7x-14$

解説

円 $(x-1)^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$，直線 $x=2$ は接線ではないから，接線の方程式を $y-0=m(x-2)$ つまり　$mx-y-2m=0$ とする。

接する条件から　$\dfrac{|m\cdot 1-3-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

ゆえに　$|-m-3|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$　から　$m^2+6m+9=2(m^2+1)$

∴　$m^2-6m-7=0$

よって　$(m+1)(m-7)=0$　から　$m=-1$，7

したがって　$y=-(x-2)$，$y=7(x-2)$　つまり　$y=-x+2$，$y=7x-14$

4．円 $x^2+y^2-2x-4=0$ に接し，(2，3) を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$y=-2x+7$，$y=\dfrac{1}{2}x+2$

解説

円 $(x-1)^2+y^2=(\sqrt{5})^2$，直線 $x=2$ は接線ではないから，接線の方程式を $y-3=m(x-2)$ つまり　$mx-y-2m+3=0$ とする。

接する条件から　$\dfrac{|m\cdot 1-0-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

ゆえに　$|-m+3|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$　から　$m^2-6m+9=5(m^2+1)$

∴　$4m^2+6m-4=0$　$(2m-1)(m+2)=0$　から　$m=-2$，$\dfrac{1}{2}$

したがって　$y-3=-2(x-2)$，$y-3=\dfrac{1}{2}(x-2)$

つまり　$y=-2x+7$，$y=\dfrac{1}{2}x+2$

5．x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

解説

$x^2+y^2=10$ …… ①，$y=-2x+5$ …… ② とする。

連立方程式 ①，② を解くと

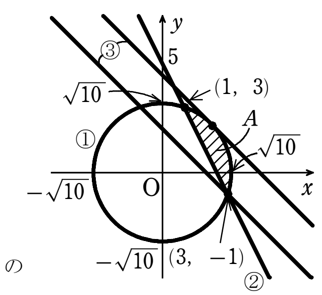
$(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(3,\ -1)$

連立不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ の表す領域 A は図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x+y=k$　…… ③

とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

図から，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大になる。



①，③ を連立して　$x^2+(k-x)^2=10$　　整理して　$2x^2-2kx+k^2-10=0$　…… ④

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線 ③ が円 ① に接するための条件は

$D/4=k^2-2(k^2-10)=0$　　　これを解いて　　$k=\pm 2\sqrt{5}$

第 1 象限では $x>0$，$y>0$ であるから，③ より $k>0$ で　　$k=2\sqrt{5}$

このとき，④ の重解は　$x=-\dfrac{-2\cdot 2\sqrt{5}}{2\cdot 2}=\sqrt{5}$　　③ から　$y=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

次に，直線 ② の傾きは -2，直線 ③ の傾きは -1 で，$-2<-1$ であるから，図より，k の値が最小となるのは，直線 ③ が点 (3，−1) を通るときである。

このとき，k の値は　　$3+(-1)=2$

よって　　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

6．座標平面上で不等式 $x^2+y^2\leqq 2$，$x+y\geqq 0$ で表される領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が A を動くとき，$4x+3y$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，$y=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ のとき最大値 $5\sqrt{2}$；$x=-1$，$y=1$ のとき最小値 -1

解説

$x^2+y^2=2$ …… ①，$x+y=0$ …… ② とする。

①，② を連立して解くと

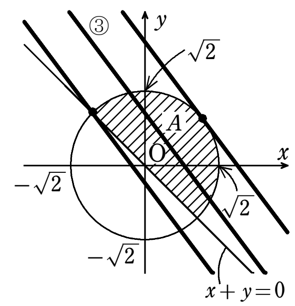
$(x,\ y)=(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$

連立不等式の表す領域 A は，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

$4x+3y=k$ …… ③ とおくと　　$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{k}{3}$

これは傾き $-\dfrac{4}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す。



図から，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大になる。

①，③ を連立して　　$x^2+\left(\dfrac{k-4x}{3}\right)^2=2$

整理すると　　$25x^2-8kx+k^2-18=0$　…… ④

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線 ③ が円 ① に接するための条件は

$$\frac{D}{4}=16k^2-25(k^2-18)=-9(k^2-50)=0$$

これを解いて　　$k=\pm 5\sqrt{2}$

第 1 象限では $x>0$，$y>0$ であるから，③ より $k>0$ で　　$k=5\sqrt{2}$

④ の重解は　$x=-\dfrac{-8\cdot 5\sqrt{2}}{2\cdot 25}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$　　③ から　$y=\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{2}-4\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

次に，直線 ② の傾きは -1，直線 ③ の傾きは $-\dfrac{4}{3}$ で，$-\dfrac{4}{3}<-1$ であるから，図より，k の値が最小となるのは，直線 ③ が点 (−1，1) を通るときである。

このとき，k の値は　　$4\cdot(-1)+3\cdot 1=-1$

よって　　$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，$y=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ のとき最大値 $5\sqrt{2}$；$x=-1$，$y=1$ のとき最小値 -1