数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．４．２０　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．(1)　次の2点AB間の距離を求めよ。　A$(-1,\ -3)$，B$(-3,\ -4)$

(2)　2点A$(1,\ -1)$，B$(4,\ 3)$ を結ぶ線分ABを3：2に外分する点の座標を求めよ。

(3)　3点A$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 1)$，C$(1,\ 3)$を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

2．直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ について点A$(2,\ 5)$ と対称な点をBとするとき，点Bの座標を求めよ。

3．次の3点を通る円の方程式を求めよ。

A$(1,\ 1)$，B$(5,\ -1)$，C$(-3,\ -7)$

4．円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=x-2$ の交点をA，Bとするとき，弦ABの長さを求めよ。

5．点A$(-1,\ 7)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

6．2点で交わる2つの円 $x^2+y^2-4x-6y=0$，$x^2+y^2-4x+6y=0$ の2つの交点と点$(2,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

7．円 $x^2+y^2=1$ ……① と直線 $y=-x+m$ ……② が異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

8．2点 A$(-3,\ 0)$，B$(3,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

9．点 Q が直線 $x-2y-1=0$ 上を動くとき，点 A$(1,\ 3)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。

10. 次の不等式の表す領域を図示せよ。$(x+y-3)(2x-3y-6)<0$

11. x，y が3つの不等式 $x-3y\geqq-6$，$x+2y\geqq4$，$3x+y\leqq12$ を同時に満たすとき，$2x+y$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

12. x，y が2つの不等式 $x^2+y^2\leqq4$，$y\geqq0$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

1．(1)　次の2点AB間の距離を求めよ。　A$(-1,\ -3)$，B$(-3,\ -4)$

(2)　2点A$(1,\ -1)$，B$(4,\ 3)$を結ぶ線分ABを3：2に外分する点の座標を求めよ。

(3)　3点A$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 1)$，C$(1,\ 3)$を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

解答　(1)　$\sqrt{5}$　　(2)　$(10,\ 11)$　　(3)　$\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{(-3)-(-1)\}^2+\{(-4)-(-3)\}^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

(2)　$\left(\dfrac{-2\times1+3\times4}{3-2},\ \dfrac{-2\times(-1)+3\times3}{3-2}\right)$　すなわち　$(10,\ 11)$

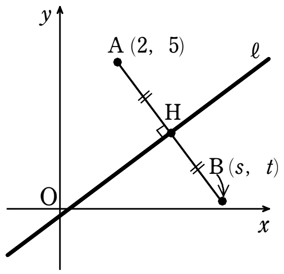
(3)　$\left(\dfrac{-2+3+1}{3},\ \dfrac{-1+1+3}{3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$

2．直線$3x-4y-1=0$をℓとする。直線ℓについて点A$(2,\ 5)$と対称な点をBとするとき，点Bの座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

解説

点Bの座標を$(s,\ t)$とする。



[1]　直線ℓの傾きは$\dfrac{3}{4}$，直線ABの傾きは$\dfrac{t-5}{s-2}$である。

AB⊥ℓ　であるから

$$\frac{t-5}{s-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

両辺に$4(s-2)$をかけて

$$3(t-5)=-4(s-2)$$

すなわち　$4s+3t=23$　……①

[2]　線分ABの中点$\left(\dfrac{2+s}{2},\ \dfrac{5+t}{2}\right)$が直線$\ell$上にあるから

$$3\cdot\frac{2+s}{2}-4\cdot\frac{5+t}{2}-1=0$$

両辺2倍して

$$3(2+s)-4(5+t)-2=0$$

すなわち　$3s-4t=16$　……②

①，②を連立して解くと　$s=\dfrac{28}{5}$，$t=\dfrac{1}{5}$

したがって，点Bの座標は　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

3．次の3点を通る円の方程式を求めよ。

A$(1,\ 1)$，B$(5,\ -1)$，C$(-3,\ -7)$

解答　$x^2+y^2-2x+8y-8=0$

解説

求める円の方程式を$x^2+y^2+lx+my+n=0$とする。

点Aを通るから　$1^2+1^2+l+m+n=0$

点Bを通るから　$5^2+(-1)^2+5l+(-1)m+n=0$

点Cを通るから　$(-3)^2+(-7)^2+(-3)l+(-7)m+n=0$

整理すると　$l+m+n+2=0$，$5l-m+n+26=0$，$3l+7m-n-58=0$

これを解くと　$l=-2$，$m=8$，$n=-8$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x+8y-8=0$

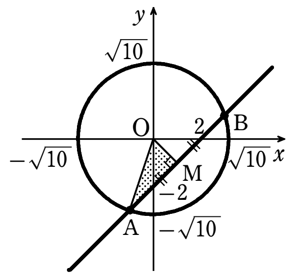
4．円$x^2+y^2=10$と直線$y=x-2$の交点をA，Bとするとき，弦ABの長さを求めよ。

解答　$4\sqrt{2}$

解説

$y=x-2$を変形すると　$x-y-2=0$

OM⊥ABであるから，OMの長さは原点Oと直線$x-y-2=0$の距離と等しい。



よって　$\mathrm{OM}=\dfrac{|0-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

△OAMにおいて，三平方の定理を使うと

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

したがって　$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

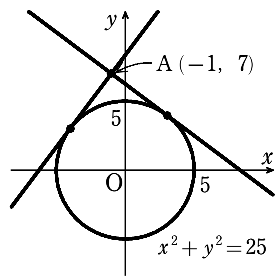
別解　2点A，Bの座標を求めると　$(-1,\ -3)$，$(3,\ 1)$　より

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

5．点A$(-1,\ 7)$から円$x^2+y^2=25$に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　接線$-4x+3y=25$，接点$(-4,\ 3)$；接線$3x+4y=25$，接点$(3,\ 4)$

解説



接点をP$(a,\ b)$とすると，点Pは円上にあるから

$a^2+b^2=25$　……①

また，点Pにおける円の接線の方程式は

$ax+by=25$

この直線が点A$(-1,\ 7)$を通るから

$-a+7b=25$

ゆえに　$a=7b-25$　……②

②を①に代入して　$(7b-25)^2+b^2=25$

整理すると　$b^2-7b+12=0$　すなわち　$(b-3)(b-4)=0$

よって　$b=3,\ 4$

②から　$b=3$のとき　$a=-4$，　$b=4$のとき　$a=3$

よって，接線は2本あり，その方程式と接点の座標は，次のようになる。

接線$-4x+3y=25$，接点$(-4,\ 3)$；接線$3x+4y=25$，接点$(3,\ 4)$

6．2点で交わる2つの円$x^2+y^2-4x-6y=0$，$x^2+y^2-4x+6y=0$の2つの交点と点$(2,\ 1)$を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2-4x+3y=0$

解説

kを定数として，方程式$x^2+y^2-4x-6y+k(x^2+y^2-4x+6y)=0$　……①を考えると，①は2つの円の2つの交点を通る図形を表す。

図形①が点$(2,\ 1)$を通るとき　$-9+k\cdot3=0$　　よって　$k=3$

これを①に代入して整理すると　$x^2+y^2-4x+3y=0$

これが求める円の方程式である。

7．円$x^2+y^2=1$　……①　と直線$y=-x+m$　……②　が異なる2点で交わるとき，定数mの値の範囲を求めよ。

解答　$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

解説

②を①に代入して　$x^2+(-x+m)^2=1$

整理すると　$2x^2-2mx+m^2-1=0$

判別式は　$D=(-2m)^2-4\cdot2(m^2-1)=-4(m^2-2)$

円①と直線②が異なる2点で交わる条件は　$D>0$

よって　$-4(m^2-2)>0$　すなわち　$m^2-2<0$

これを解いて　$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

別解　②から　$x+y-m=0$

円の中心と直線の距離をdとすると　$d=\dfrac{|-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$

また，円の半径は　1

円①と直線②が異なる2点で交わる条件は

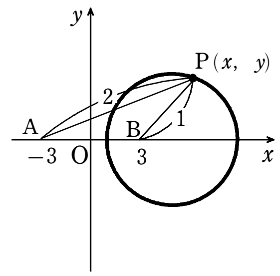
$d<1$　すなわち　$\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}<1$

よって　$|m|<\sqrt{2}$　したがって　$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

8．2点A$(-3,\ 0)$，B$(3,\ 0)$からの距離の比が2：1である点Pの軌跡を求めよ。

解答　点$(5,\ 0)$を中心とする半径4の円

解説



点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

Pに関する条件は　AP：BP＝2：1

これより　AP＝2BP

すなわち　$\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2=\{x-(-3)\}^2+y^2=(x+3)^2+y^2$，

$\mathrm{BP}^2=(x-3)^2+y^2$を代入すると

$$(x+3)^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$$

整理すると　$x^2-10x+y^2+9=0$

すなわち　$(x-5)^2+y^2=4^2$

よって，点Pは円$(x-5)^2+y^2=4^2$上にある。

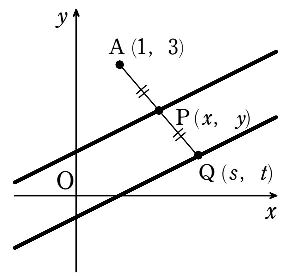
逆に，この円上のすべての点P$(x,\ y)$は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　点$(5,\ 0)$を中心とする半径4の円

9．点Qが直線$x-2y-1=0$上を動くとき，点A$(1,\ 3)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

解答　直線$x-2y+2=0$

解説



点Qの座標を$(s,\ t)$とすると，Qは直線$x-2y-1=0$上にあるから

$s-2t-1=0$　……①

また，点Pの座標を$(x,\ y)$とすると，条件から

$x=\dfrac{1+s}{2}$，　$y=\dfrac{3+t}{2}$

すなわち　$s=2x-1$，$t=2y-3$

これらを①に代入して

$(2x-1)-2(2y-3)-1=0$

整理すると　$x-2y+2=0$

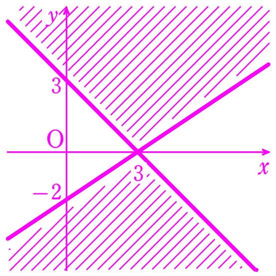
よって，点Pは直線$x-2y+2=0$上にある。

逆に，この直線上のすべての点P$(x,\ y)$は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　直線$x-2y+2=0$

10. 次の不等式の表す領域を図示せよ。$(x+y-3)(2x-3y-6)<0$

解答 ［図］境界線を含まない



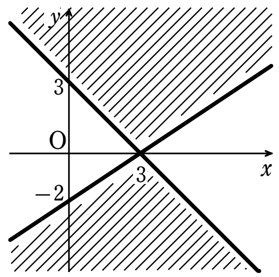
解説

不等式 $(x+y-3)(2x-3y-6)<0$ は

$$\begin{cases} x+y-3>0 \\ 2x-3y-6<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y-3<0 \\ 2x-3y-6>0 \end{cases}$$

と表される。

よって，求める領域は［図］の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



11. x, y が 3 つの不等式 $x-3y\geqq-6$, $x+2y\geqq4$, $3x+y\leqq12$ を同時に満たすとき，$2x+y$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

解答 $x=3$, $y=3$ のとき最大値 9；$x=0$, $y=2$ のとき最小値 2

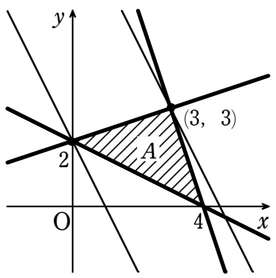
解説

与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は 3 点 $(4,\ 0)$, $(3,\ 3)$, $(0,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$2x+y=k$ …… ①

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値の範囲を調べる。



点 $(4,\ 0)$ を通るとき $k=8$

点 $(3,\ 3)$ を通るとき $k=9$

点 $(0,\ 2)$ を通るとき $k=2$

これ以外で領域 A の点を通るとき $2<k<9$

よって $x=3$, $y=3$ のとき最大値 9；$x=0$, $y=2$ のとき最小値 2

12. x, y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq4$, $y\geqq0$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

解答 $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$x=-2$, $y=0$ のとき最小値 -2

解説

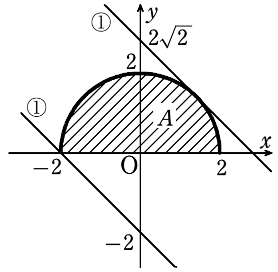
与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は右の図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。

$x+y=k$ …… ①

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値の範囲を調べる。



直線 ① と円 $x^2+y^2=4$ が接するとき

$x^2+(-x+k)^2=4$

すなわち $2x^2-2kx+k^2-4=0$ …… ② が重解をもつ。

判別式は $D=(-2k)^2-4\cdot2(k^2-4)=-4(k^2-8)$

$D=0$ であるから $k^2-8=0$ 　よって $k=\pm2\sqrt{2}$

図から，直線 ① と半円 $x^2+y^2=4$, $y\geqq0$ が接するとき $k=2\sqrt{2}$

このとき，② から $x=-\dfrac{-2k}{2\cdot2}=\dfrac{k}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$, $k=2\sqrt{2}$ を ① に代入して $y=\sqrt{2}$

直線 ① が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき $k=-2$

これ以外で領域 A の点を通るとき $-2<k<2\sqrt{2}$

したがって，$x+y$ は

$x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$,

$x=-2$, $y=0$ のとき最小値 -2

をとる。