確認テスト（図形と方程式）Ｈ２５．５．１９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．点 A $(-1,\ 2)$ について，点 P $(2,\ 5)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

２．2 点 A $(2,\ 1)$，B $(5,\ -2)$ から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

３．k を定数とするとき，直線 $(1+k)x-(1-3k)y=-7k-1$ は，k の値に関係なく，定点を通る。その点の座標を求めよ。

４．2 直線 $2x-y-1=0$，$3x+2y-3=0$ の交点を通り，直線 $2x-3y-5=0$ に平行な直線の方程式を求めよ。（$ax+by+c=0$の形で答えること）

５．3 点 A $(1,\ 1)$，B $(3,\ 7)$，C $(5,\ 4)$ を頂点とする $\triangle$ABC の面積 S を求めよ。

６．3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

７．方程式 $x^2+y^2+2kx-4ky+4k^2+6=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。

8．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(2,\ 1)$ で，x 軸に接する円

(2)　2 点 $(5,\ 1)$，$(1,\ 3)$ を直径の両端とする円

9．放物線 $y=x^2-2(m+1)x+3m^2-m$ の頂点の座標を m で表せ。また，m がすべての実数値をとって変化するとき，頂点はどんな曲線上を動くか。

10. 次の円と直線の共有点の個数を調べよ。　$x^2+y^2=4$，$y=-2x+k$

11. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$|x-y|\leqq 1$

(2)　$|x|+2|y|<8$

確認テスト（図形と方程式）Ｈ２５．５．１９　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．点 A$(-1,\ 2)$ について，点 P$(2,\ 5)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　$(-4,\ -1)$

解説

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とおく。

線分 PQ の中点が A であるから　$\dfrac{2+x}{2}=-1,\ \dfrac{5+y}{2}=2$

よって　$x=-4,\ y=-1$

したがって，点 Q の座標は　$(-4,\ -1)$

2．2 点 A$(2,\ 1)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

解答　$(4,\ 0)$

解説

求める点を P$(x,\ 0)$ とする。

AP＝BP から　$AP^2=BP^2$

したがって　$(x-2)^2+(0-1)^2=(x-5)^2+\{0-(-2)\}^2$

整理して　$6x-24=0$

よって　$x=4$

ゆえに，求める点の座標は　$(4,\ 0)$

3．k を定数とするとき，直線 $(1+k)x-(1-3k)y=-7k-1$ は，k の値に関係なく，定点を通る。その点の座標を求めよ。

解答　$\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

解説

直線の方程式を k について整理すると　$k(x+3y+7)+x-y+1=0$

するとこの直線は，$x+3y+7=0$ と $x-y+1=0$ という 2 直線の交点を通る直線だと読み取れる。交点の座標を求めると

$x+3y+7=0,\ x-y+1=0$

これを解くと　$x=-\dfrac{5}{2},\ y=-\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線は定点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ を通る。

4．2 直線 $2x-y-1=0$，$3x+2y-3=0$ の交点を通り，直線 $2x-3y-5=0$ に平行な直線の方程式を求めよ。（$ax+by+c=0$ の形で答えること）

解答　$14x-21y-1=0$

解説

k を定数として，方程式

$2x-y-1+k(3x+2y-3)=0$　…… ①

を考えると，① は直線を表し，その直線は 2 直線 $2x-y-1=0$，$3x+2y-3=0$ の交点を通る。

① を変形すると　$(3k+2)x+(2k-1)y-3k-1=0$

これが直線 $2x-3y-5=0$ に平行であるから

$(3k+2)\cdot(-3)-2\cdot(2k-1)=0$　　（←　下の参考）

よって解いて　$k=-\dfrac{4}{13}$

これを ① に代入して整理すると　$14x-21y-1=0$

参考

2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ について

これらが平行ならば　$a_1:a_2=b_1:b_2$　つまり　$a_1b_2-a_2b_1=0$

これらが垂直ならば　$\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)=-1$　つまり　$a_1a_2+b_1b_2=0$

が成り立つ。

別解　2 直線の交点の座標を求めると　$\left(\dfrac{5}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)$

よって，求める直線の方程式は

点 $\left(\dfrac{5}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)$ を通り，直線 $2x-3y-5=0$ に平行であるから

$2\left(x-\dfrac{5}{7}\right)-3\left(y-\dfrac{3}{7}\right)=0$　つまり　$14x-21y-1=0$

参考

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に

平行な直線の方程式　→　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直な直線の方程式　→　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

5．3 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 7)$，C$(5,\ 4)$ を頂点とする △ABC の面積 S を求めよ。

解答　9

解説

直線 AB の方程式は　$y-1=\dfrac{7-1}{3-1}(x-1)$　すなわち　$3x-y-2=0$

点 C と直線 AB の距離 h は　$h=\dfrac{|3\cdot5-4-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{10}}$

また　$AB=\sqrt{(3-1)^2+(7-1)^2}=2\sqrt{10}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{10}}=9$

別解

3 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 7)$，C$(5,\ 4)$ について，点Aが原点に移るように△ABCを平行移動すると，B$(3,7)$は$(2,6)$に，C$(5,4)$は$(4,3)$に移る。

ゆえに，△ABCの面積は，３頂点$(0,0)$，$(2,6)$，$(4,3)$を頂点とする三角形の面積に等しいので，面積Sは

$S=\dfrac{1}{2}|2\times3-6\times4|=\dfrac{1}{2}|-18|=\dfrac{1}{2}\times18=9$

参考

３点$(0,0)$，(a,b)，(c,d)を頂点とする三角形の面積Sは　$S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

6．3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=-3,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

解説

$x-2y+9=0$ …… ①，$3x+y-1=0$ …… ②，$ax-y+5=0$ …… ③ とする。

直線 ① の傾きは　$\dfrac{1}{2}$，直線 ② の傾きは　-3，直線 ③ の傾きは　a

よって，3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないとき，次の 2 つの場合がある。

[1]　直線 ③ が直線 ① または直線 ② と平行になる。

直線 ③ が直線 ① と平行になるとき　$a=\dfrac{1}{2}$

直線 ③ が直線 ② と平行になるとき　$a=-3$

[2]　3 直線が 1 点で交わる。

①，② を連立して解くと　$x=-1,\ y=4$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は　$(-1,\ 4)$

直線 ③ が点 $(-1,\ 4)$ を通るとき　$a\cdot(-1)-4+5=0$

よって　$a=1$

以上から，求める a の値は　$a=-3,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

7．方程式 $x^2+y^2+2kx-4ky+4k^2+6=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　$k<-\sqrt{6},\ \sqrt{6}<k$

解説

方程式を変形すると

$(x^2+2kx+k^2)-k^2+(y^2-4ky+4k^2)+6=0$

ゆえに　$(x+k)^2+(y-2k)^2=k^2-6$　…… ①

これが円を表すための条件は，半径が存在しなければならないので　$k^2-6>0$

よって　$(k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6})>0$

したがって　$k<-\sqrt{6},\ \sqrt{6}<k$

8．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(2,\ 1)$ で，x 軸に接する円

(2)　2 点 $(5,\ 1)$，$(1,\ 3)$ を直径の両端とする円

解答　(1)　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$　　(2)　$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

解説

(1)　x 軸に接するとき，円の半径は中心の y 座標の絶対値に等しい。

したがって　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

(2)　円の中心は，与えられた 2 点を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)$　すなわち　$(3,\ 2)$

また，半径は　$\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-5)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

したがって　$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

9．放物線 $y=x^2-2(m+1)x+3m^2-m$ の頂点の座標を m で表せ。また，m がすべての実数値をとって変化するとき，頂点はどんな曲線上を動くか。

解答　頂点 $(m+1,\ 2m^2-3m-1)$，放物線 $y=2x^2-7x+4$

解説

$y=\{x^2-2(m+1)x+(m+1)^2\}-(m+1)^2+3m^2-m$

$\quad=\{x-(m+1)\}^2+2m^2-3m-1$

よって，頂点の座標は　$(m+1,\ 2m^2-3m-1)$

$x=m+1$，$y=2m^2-3m-1$ として，この 2 式から m を消去すると

$m=x-1$ より　$y=2(x-1)^2-3(x-1)-1$

整理して　$y=2x^2-7x+4$

したがって，放物線 $y=2x^2-7x+4$ 上を動く。

10．次の円と直線の共有点の個数を調べよ。　$x^2+y^2=4$，$y=-2x+k$

解答　$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき 2 個；$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき 1 個；

$k<-2\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}<k$ のとき 0 個

解説

$x^2+y^2=4$ ……①，$y=-2x+k$ ……② とする。

円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離は　$\dfrac{|2\cdot0+1\cdot0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

また，円 ① の半径は　2

したがって，共有点の個数は

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}<2$　すなわち　$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき　2 個

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=2$　すなわち　$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき　1 個

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}>2$　すなわち　$k<-2\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}<k$ のとき　0 個

別解　② を ① に代入して　$x^2+(-2x+k)^2=4$

整理すると　$5x^2-4kx+k^2-4=0$

判別式は　$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20=-(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})$

したがって，共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき　2 個

$D=0$　すなわち　$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき　1 個

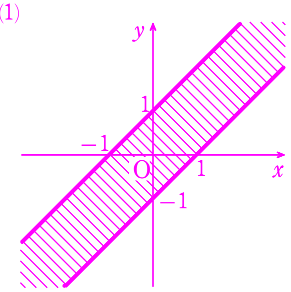
$D<0$　すなわち　$k<-2\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}<k$ のとき　0 個

11．次の不等式の表す領域を図示せよ。

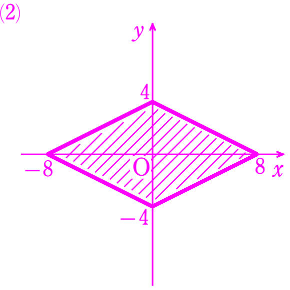
(1)　$|x-y|\leqq1$　　(2)　$|x|+2|y|<8$

解答　(1)　[図]，境界線を含む　(2)　[図]，境界線を含まない

(1)



(2)



解説

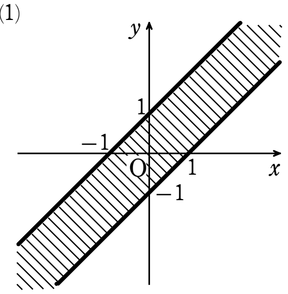
(1)　$|x-y|\leqq1$ から　$-1\leqq x-y\leqq1$

すなわち　$\begin{cases}x-y\geqq-1\\x-y\leqq1\end{cases}$

よって，求める領域は図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

(1)



参考

$A>0$ ならば

$|X|\leqq A$　は　$-A\leqq X\leqq A$　と変形できる

(2)　$|x|+2|y|<8$ ……①

$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき，① は　$x+2y<8$　…(Ⅰ)

$x\geqq0$，$y<0$ のとき，① は　$x-2y<8$　…(Ⅱ)

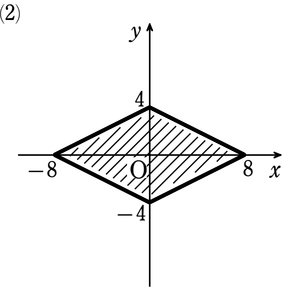
$x<0$，$y\geqq0$ のとき，① は　$-x+2y<8$　…(Ⅲ)

$x<0$，$y<0$ のとき，① は　$-x-2y<8$　…(Ⅳ)

よって，求める領域は図の斜線部分である。

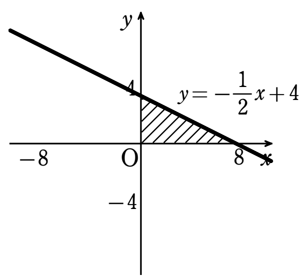
ただし，境界線を含まない。

(2)

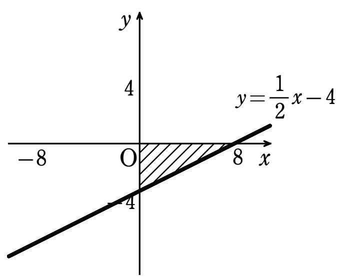


参考

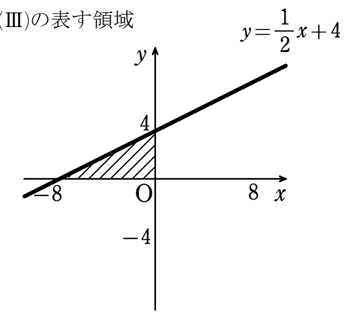
(Ⅰ)の表す領域



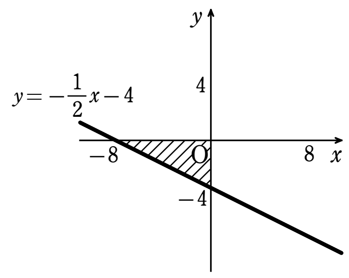
(Ⅱ)の表す領域は



(Ⅲ)の表す領域



(Ⅳ)の表す領域は



これら 4 枚の絵を 1 枚にまとめたものが解答となる。