統一テスト（図形と方程式•軌跡と領域）Ｈ２３．４．１５　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．(1)　次の2点間の距離を求めよ。　$(-2,\ 3)$，$(4,\ 0)$

(2)　A$(1,\ 4)$，B$(5,\ -2)$に対し，線分ABを2：1の比に外分する点の座標を求めよ。

(3)　3点A$(-3,\ 0)$，B$(2,\ 5)$，C$(2,\ 1)$を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。

2．点A$(-2,\ 1)$，直線 ℓ ：$2x-3y-4=0$ について

(1)　点Aを通り，ℓ に平行な直線の方程式を求めよ。

(2)　点Aを通り，ℓ に垂直な直線の方程式を求めよ。

3．直線$3x+2y-6=0$について，点$(3,\ 1)$と対称な点の座標を求めよ。

4．次の3点を通る円の方程式を求めよ。　$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

5．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。

6．点$(-2,\ 4)$から円$x^2+y^2=10$に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

7．2 つの円 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，$x^2+y^2-6x+5=0$ の 2 つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

8．2 点 O (0，0)，A (6，0) からの距離の比が 2 : 1 である点 Pの軌跡を求めよ。

9．点 A (−5，2) と直線 $y=2x+4$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 Pの軌跡を求めよ。

10．連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ x \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

11．次の不等式の表す領域を図示せよ。　$(x+y-3)(2x-y+6)<0$

12．x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+2y \leqq 12$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

1．(1)　次の2点間の距離を求めよ。　$(-2,\ 3)$，$(4,\ 0)$

(2)　$A(1,\ 4)$，$B(5,\ -2)$に対し，線分ABを2：1の比に外分する点の座標を求めよ。

(3)　3点$A(-3,\ 0)$，$B(2,\ 5)$，$C(2,\ 1)$を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

解答　(1)　$3\sqrt{5}$　(2)　$(9,\ -8)$　(3)　$\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$

解説

(1)　$\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(0-3)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2)　$\left(\frac{-1\cdot1+2\cdot5}{2-1},\ \frac{-1\cdot4+2\cdot(-2)}{2-1}\right)$　すなわち　$(9,\ -8)$

(3)　$\left(\frac{-3+2+2}{3},\ \frac{0+5+1}{3}\right)$　すなわち　$\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$

2．点$A(-2,\ 1)$，直線ℓ：$2x-3y-4=0$について

(1)　点Aを通り，ℓに平行な直線の方程式を求めよ。

(2)　点Aを通り，ℓに垂直な直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$2x-3y+7=0$　　(2)　$3x+2y+4=0$

解説

直線ℓの傾きは$\frac{2}{3}$である。

(1)　求める直線は点$(-2,\ 1)$を通り，傾きが$\frac{2}{3}$であるから，その方程式は

$$y-1=\frac{2}{3}(x+2)\quad すなわち\quad 2x-3y+7=0$$

(2)　ℓに垂直な直線の傾きは$-\frac{3}{2}$であるから，求める直線の方程式は

$$y-1=-\frac{3}{2}(x+2)\quad すなわち\quad 3x+2y+4=0$$

3．直線$3x+2y-6=0$について，点$(3,\ 1)$と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\frac{9}{13},\ -\frac{7}{13}\right)$

解説

求める点の座標を$(p,\ q)$とする。

2点$(3,\ 1)$，$(p,\ q)$を通る直線が直線$3x+2y-6=0$に垂直であるから

$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　$2p-3q=3$　……①

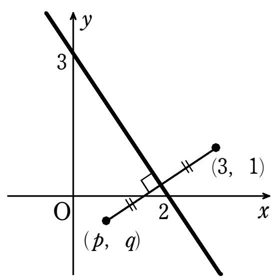
また，2点$(3,\ 1)$，$(p,\ q)$を結ぶ線分の中点が，直線$3x+2y-6=0$上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　$3p+2q=1$　……②

①，②を連立して解くと　$p=\frac{9}{13}$，$q=-\frac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　$\left(\frac{9}{13},\ -\frac{7}{13}\right)$



4．次の3点を通る円の方程式を求めよ。　$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

解答　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

解説

求める円の方程式を$x^2+y^2+lx+my+n=0$とする。

点$(-3,\ 4)$を通るから　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　$3l-4m-n=25$　……①

点$(4,\ 5)$を通るから　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　$4l+5m+n=-41$　……②

点$(1,\ -4)$を通るから　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

ゆえに　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③を解いて　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

5．円$(x-1)^2+(y-2)^2=5$が直線$y=3x-6$から切り取る弦の長さを求めよ。

解答　$\sqrt{10}$

解説

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$　……①，$y=3x-6$　……②

とする。

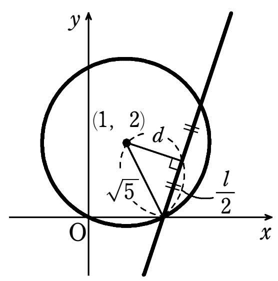
円①の中心$(1,\ 2)$と直線②の距離dは

$$d=\frac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

弦の長さをlとすると，円①の半径は$\sqrt{5}$であるから

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\frac{5}{2}$$

ゆえに　$l^2=10$　　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$



別解　②を①に代入して　$(x-1)^2+(3x-8)^2=5$

整理すると　$x^2-5x+6=0$　　よって　$(x-2)(x-3)=0$

ゆえに　$x=2,\ 3$

②から，$x=2$のとき　$y=0$，$x=3$のとき　$y=3$

よって，円①と直線②の交点の座標は　$(2,\ 0)$，$(3,\ 3)$

弦の長さをlとすると　$l=\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

6．点$(-2,\ 4)$から円$x^2+y^2=10$に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

解説

接点を$P(a,\ b)$とする。

点Pは円$x^2+y^2=10$上にあるから　$a^2+b^2=10$　……①

点Pにおける接線の方程式は　$ax+by=10$　……②

この直線が点$(-2,\ 4)$を通るから　$-2a+4b=10$

よって　$a=2b-5$　……③

③を①に代入して　$(2b-5)^2+b^2=10$

ゆえに　$b^2-4b+3=0$　　これを解いて　$b=1,\ 3$

[1]　$b=1$のとき，③から　$a=-3$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，②から　$-3\cdot x+1\cdot y=10$　　すなわち　$-3x+y=10$

[2]　$b=3$のとき，③から　$a=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，②から　$1\cdot x+3\cdot y=10$　　すなわち　$x+3y=10$

7．2つの円$x^2+y^2-2x-2y+1=0$，$x^2+y^2-6x+5=0$の2つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2-x-\frac{5}{2}y=0$

解説

kを定数として，方程式

$$x^2+y^2-2x-2y+1+k(x^2+y^2-6x+5)=0\quad ……①$$

を考えると，①の表す図形は2つの円の交点を通る。

これが原点を通るとき，$x=y=0$を代入して　$1+5k=0$

したがって　$k=-\frac{1}{5}$

これを①に代入して整理すると

$$2x^2+2y^2-2x-5y=0$$

$$x^2+y^2-x-\frac{5}{2}y=0$$

これが求める円の方程式である。

8．2点$O(0,\ 0)$，$A(6,\ 0)$からの距離の比が2：1である点Pの軌跡を求めよ。

解答　円$(x-8)^2+y^2=16$

解説

点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

OP：AP＝2：1から　OP＝2AP

すなわち　$OP^2=4AP^2$

ゆえに　$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$

整理して　$x^2+y^2-16x+48=0$

変形して　$(x-8)^2+y^2=16$　……①

よって，点Pは円①上にある。

逆に，この円①上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　円$(x-8)^2+y^2=16$

9．点$A(-5,\ 2)$と直線$y=2x+4$上の点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

解答　直線$y=2x+8$

解説

点Qの座標を$(s,\ t)$とし，点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

Qは直線$y=2x+4$上にあるから　$t=2s+4$　……①

また，Pは線分AQの中点であるから　$x=\frac{s-5}{2}$，$y=\frac{t+2}{2}$

すなわち　$s=2x+5$，$t=2y-2$

これを①に代入して　$2y-2=2(2x+5)+4$

整理すると　$y=2x+8$

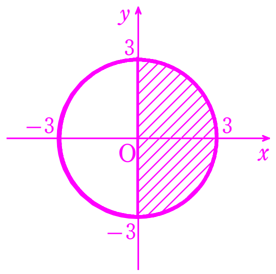
よって，点Pは直線$y=2x+8$上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　直線$y=2x+8$

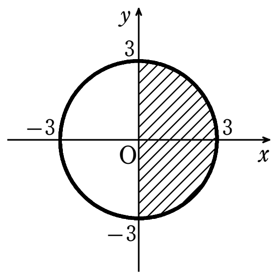
10. 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ x \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

解答　[図]，境界線を含む



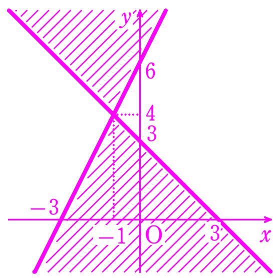
解説

求める領域は，円 $x^2+y^2=9$ の円の内部と，直線 $x=0$ (つまり y軸) の右側の共通範囲で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



11. 次の不等式の表す領域を図示せよ。　$(x+y-3)(2x-y+6)<0$

解答　[図]，境界線を含まない



解説

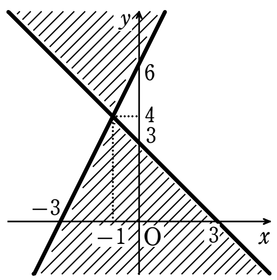
与えられた不等式は

$$\begin{cases} x+y-3>0 \\ 2x-y+6<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y-3<0 \\ 2x-y+6>0 \end{cases}$$

すなわち　$\begin{cases} y>-x+3 \\ y>2x+6 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y<-x+3 \\ y<2x+6 \end{cases}$

よって，求める領域は [図] の斜線部分である。

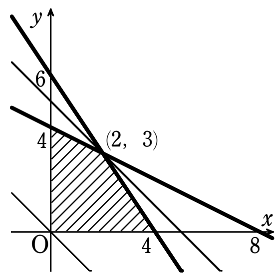
ただし，境界線を含まない。



12. x，y が4つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+2y \leqq 12$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

解説



連立方程式 $3x+2y=12$，$x+2y=8$ を解くと

$$x=2,\quad y=3$$

であるから，与えられた連立不等式の表す領域は，4点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(0,\ 4)$，$(2,\ 3)$ を頂点とする四角形の内部および周である。

$x+y=k$　…… ① とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

図から，直線 ① が点 $(2,\ 3)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=2+3=5$

また，直線 ① が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=0$

よって，$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5；

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0