

1. 次の方程式は、どんな図形を表すか。 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$ 2. 3点$(-3, 4), (4, 5), (1, -4)$を通る円の方程式を求めよ。	3. 円$x^2+y^2=6$と直線$y=x+k$が共有点を持つとき、定数kの値の範囲を求めよ。 4. 円$x^2+y^2=25$上の点$(4, -3)$における接線の方程式を求めよ。 5. 点$(1, 3)$を通り、円$x^2+y^2=5$に接する接線の方程式とそのときの接点の座標を求めよ。	6. 2点$A(0, 0), B(3, 0)$からの距離の比が$2:1$である点Pの軌跡を求めよ。 7. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。$\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ 3x+2y\geq 4 \end{cases}$ 8. x, yが不等式$x\geq 0, y\geq 0, x+3y\leq 15, 2x+y\leq 10$を満たすとき、$3x+2y$の最大値、最小値を求めよ。
---	---	---

1. 次の方程式は、どんな図形を表すか。 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

∴ 中心 $(-1, 3)$ 半径 3 の円 (10)

2. 3点 $(-3, 4), (4, 5), (1, -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

$$x^2 + y^2 + \ell x + m y + n = 0 \quad \text{と仮定}$$

$$\begin{aligned} (-3, 4) \text{ を通るから } & (-3)^2 + 4^2 + \ell(-3) + m \cdot 4 + n = 0 \\ & \therefore -3\ell + 4m + n = -25 \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4, 5) \text{ を通るから } & 4^2 + 5^2 + \ell \cdot 4 + m \cdot 5 + n = 0 \\ & \therefore 4\ell + 5m + n = -41 \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, -4) \text{ を通るから } & 1^2 + (-4)^2 + \ell \cdot 1 + m(-4) + n = 0 \\ & \therefore \ell - 4m + n = -17 \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(1) - (3) より} & -7\ell - m = 16 \quad \therefore 7\ell + m = -16 \quad \text{--- (4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(1) - (2) より} & -4\ell + 8m = -8 \quad \therefore \ell - 2m = 2 \quad \text{--- (5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4) } \times 2 + \text{(5) より} & 14\ell + 2m = -32 \\ +) & \ell - 2m = 2 \\ \hline 15\ell & = -30 \\ \therefore \ell & = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(5) より } & -3(-2) + 4(-2) + n = -25 \quad 6 - 8 + n = -25 \quad n = -23 \\ \text{よって } & x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \quad \text{--- (15)} \end{aligned}$$

3. 円 $x^2 + y^2 = 6$ と直線 $y = x + k$ が共有点を持つとき、定数 k の値の範囲を求めよ。

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y = x + k \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 + 2kx + k^2 - 6 = 0$$

が実数解を持つ。

$$D/4 = k^2 - 2(k^2 - 6) \geq 0$$

つまり、 x の 2 次方程式

$$-k^2 + 12 \geq 0$$

$$x^2 + (x+k)^2 = 6$$

$$k^2 - 12 \leq 0 \quad \text{--- (15)}$$

が実数解を持つ

$$(k + \sqrt{12})(k - \sqrt{12}) \leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{3} \leq k \leq 2\sqrt{3}$$

4. 円 $x^2 + y^2 = 25$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めよ。

(公式より)

$$4x + (-3)y = 25$$

$$\therefore 4x - 3y = 25 \quad \text{--- (10)}$$

5. 点 $(1, 3)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 5$ に接する接線の方程式とそのときの接点の座標を求めよ。

接点 (x_1, y_1) と仮定

接線 $ax + by = c$ として

$$x_1 x + y_1 y = 5$$

と $(1, 3)$ を通るから $(1, 3)$ を通るから

$$x_1 + 3y_1 = 5 \quad \text{--- (1)}$$

また (x_1, y_1) は円 $x^2 + y^2 = 5$ 上の点より

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \text{--- (2)}$$

①より $x_1 = -3y_1 + 5$ を (2) に代入

$$(-3y_1 + 5)^2 + y_1^2 = 5$$

$$9y_1^2 - 30y_1 + 25 + y_1^2 = 5$$

$$10y_1^2 - 30y_1 + 20 = 0$$

$$y_1^2 - 3y_1 + 2 = 0$$

$$(y_1 - 1)(y_1 - 2) = 0$$

$$y_1 = 1, 2$$

$$y_1 = 1 \text{ の時}$$

$$x_1 = 2$$

$$y_1 = 2 \text{ の時}$$

$$x_1 = -1$$

よって

接点 $(2, 1)$ の時

接線 $2x + y = 5$

接点 $(-1, 2)$ の時

接線 $-x + 2y = 5$

6. 2点 $A(0, 0), B(3, 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

$P(x, y)$ と仮定

$$AP:PB = 2:1 \quad \text{より}$$

$$A(0, 0), B(3, 0), P(x, y) \text{ より}$$

$$AP = 2PB$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4 \{ (x-3)^2 + (y-0)^2 \}$$

2乗して

$$x^2 + y^2 = 4(x^2 - 6x + 9 + y^2)$$

$$AP^2 = 4PB^2$$

$$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \quad \text{--- (10)}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

中心 $(4, 0)$
半径 2 の円

7. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ 3x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

$$3x + 2y \geq 4$$

$$2y \geq -3x + 4$$

$$\therefore y \geq -\frac{3}{2}x + 2$$

領域は円の斜線部分

ただし、円の境界と円の直線の交点は含まない。

直線の境界は含む

8. x, y が不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 15, 2x + y \leq 10$ を満たすとき、 $3x + 2y$ の最大値、最小値を求めよ。

$$x + 3y \leq 15$$

$$3y \leq -x + 15$$

$$\therefore y \leq -\frac{1}{3}x + 5$$

$$2x + y \leq 10$$

$$y \leq -2x + 10$$

不等式を満たす領域は

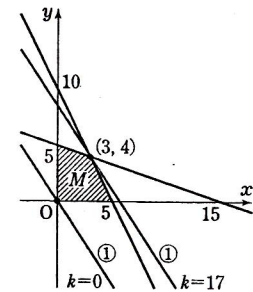
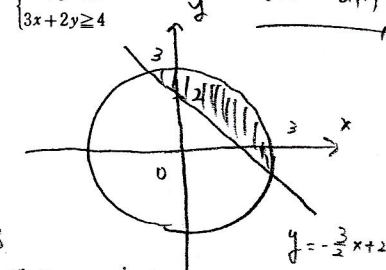
図の斜線部分 (境界含む)

$y = -\frac{1}{3}x + 5$ と $y = -2x + 10$ の交点は

$$-\frac{1}{3}x + 5 = -2x + 10 \quad \frac{5}{3}x = 5 \quad \therefore x = 3, y = 4$$

$3x + 2y = k$ と仮定 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2}$ (傾き $-\frac{3}{2}$ の直線)

k が最大となるのは $x = 3, y = 4$ を通る時で、この時 $k = 17$
 k が最小となるのは $x = 0, y = 0$ を通る時で、この時 $k = 0$



よって

最大値 17

最小値 0

(15)