数学演習（軌跡と領域）Ｈ２１．１１．２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．2点A(0, 0), B(5, 0)からの距離の比が2 : 3である点Pの軌跡を求めよ。

２．放物線 $y=x^2-2x+4$ 上の点をQとし，定点をA(2, 2)とする。線分AQを3 : 2に外分する点Pの軌跡を求めよ。

３．放物線 $y=x^2+2(a-2)x-4a+5$ について，a を変化させると放物線の頂点は1つの曲線を描く。この曲線の方程式を求めよ。

４．直線 $x+y=1$ に関して点Qと対称な点をPとする。点Qが直線 $x-2y+8=0$ 上を動くとき，点Pは直線 $\boxed{}$ 上を動く。

５．t が実数の値をとって変わるとき，2直線 $\ell : tx-y=t$，$m : x+ty=2t+1$ の交点P$(x,\ y)$ はどのような図形になるか。その方程式を求めて図示せよ。

6. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x-3y-9<0 \\ 2x+3y-6>0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ x-y<3 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} y \leqq x+1 \\ y \geqq x^2-1 \end{cases}$

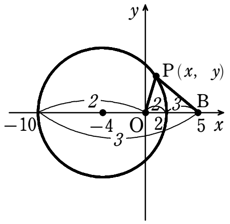
7. 不等式 $(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ の表す領域を図示せよ。

8. x，y が 4 つの不等式 $y \geqq 0$，$y \leqq x+1$，$2x+3y \geqq 3$，$3x+y \leqq 9$ を満たすとき，$x+3y$ の最大値および最小値を求めよ。

9. 連立不等式 $x-7y+23 \leqq 0$，$2x-3y+13 \geqq 0$，$x+4y-21 \leqq 0$ の表す領域を D とする。
点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，x^2+y^2 の最大値は ア $\boxed{}$，最小値は イ $\boxed{}$ である。

１. 2 点 A(0, 0), B(5, 0) からの距離の比が 2 : 3 である点 P の軌跡を求めよ。

解答　中心 $(-4,\ 0)$, 半径 6 の円



点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P の満たす条件は　　$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:3$

すなわち　　$3\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$

よって　　$9\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

これを座標で表すと

$$9(x^2+y^2)=4\{(x-5)^2+y^2\}$$

整理すると　$x^2+y^2+8x-20=0$

すなわち　$(x+4)^2+y^2=6^2$　……①

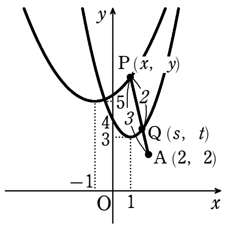
ゆえに，条件を満たす点は円 ① 上にある。

逆に，円 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　中心 $(-4,\ 0)$, 半径 6 の円

２. 放物線 $y=x^2-2x+4$ 上の点を Q とし，定点を A(2, 2) とする。線分 AQ を 3 : 2 に外分する点 P の軌跡を求めよ。

解答　放物線 $y=\dfrac{1}{3}(x+1)^2+5$



点 Q の座標を $(s,\ t)$，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

Q は放物線 $y=x^2-2x+4$ 上の点であるから

$$t=s^2-2s+4\quad\cdots\cdots①$$

P は線分 AQ を 3 : 2 に外分する点であるから

$$x=\frac{(-2)\cdot2+3\cdot s}{3-2}=-4+3s,$$

$$y=\frac{(-2)\cdot2+3\cdot t}{3-2}=-4+3t$$

よって　$s=\dfrac{x+4}{3}$,　$t=\dfrac{y+4}{3}$

これを ① に代入すると　　$\dfrac{y+4}{3}=\left(\dfrac{x+4}{3}\right)^2-2\left(\dfrac{x+4}{3}\right)+4$

整理して　　$y=\dfrac{1}{3}(x^2+2x+16)$　……②

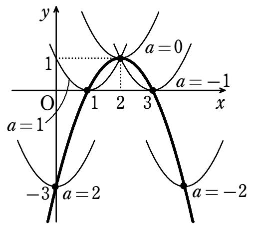
ゆえに，点 P は放物線 ② 上にある。

逆に，放物線 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　放物線　$y=\dfrac{1}{3}(x+1)^2+5$

３. 放物線 $y=x^2+2(a-2)x-4a+5$ について，a を変化させると放物線の頂点は 1 つの曲線を描く。この曲線の方程式を求めよ。

解答　$y=-(x-2)^2+1$



放物線の方程式を変形すると

$$y=\{x+(a-2)\}^2-a^2+1$$

放物線の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=-a+2\quad\cdots\cdots①$$

$$y=-a^2+1\quad\cdots\cdots②$$

① から　　$a=-x+2$

これを ② に代入して

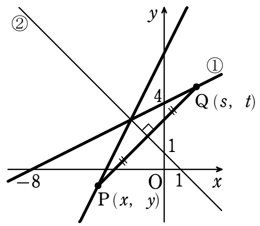
$$y=-(-x+2)^2+1$$

したがって，求める曲線の方程式は

$$y=-(x-2)^2+1\ \text{（放物線）}$$

４. 直線 $x+y=1$ に関して点 Q と対称な点を P とする。点 Q が直線 $x-2y+8=0$ 上を動くとき，点 P は直線 $\boxed{}$ 上を動く。

解答　$2x-y+7=0$



直線 $x-2y+8=0$ ……① 上を動く点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$ とし，直線 $x+y=1$ ……② に関して点 Q と対称な点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

直線 PQ が直線 ② に垂直であるから

$$\frac{t-y}{s-x}\cdot(-1)=-1\quad\cdots\cdots③$$

線分 PQ の中点が直線 ② 上にあるから

$$\frac{x+s}{2}+\frac{y+t}{2}=1\quad\cdots\cdots④$$

③ から　　$s-t=x-y$

④ から　　$s+t=2-(x+y)$

s, t について解くと　　$s=1-y$, $t=1-x$　……⑤

また，点 Q は直線 ① 上の点であるから　　$s-2t+8=0$　……⑥

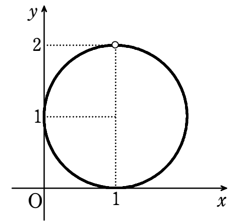
⑤ を ⑥ に代入して　　$(1-y)-2(1-x)+8=0$

したがって，求める直線の方程式は　　$2x-y+7=0$

５. t が実数の値をとって変わるとき，2 直線 $\ell：tx-y=t$, $m：x+ty=2t+1$ の交点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はどのような図形になるか。その方程式を求めて図示せよ。

解答　円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

ただし，点 (1, 2) を除く [図]



$\ell：tx-y=t$ ……①，$m：x+ty=2t+1$ ……② とする。

① から　　$t(x-1)=y$　……③

② から　　$t(y-2)=1-x$　……④

[1]　$y\neq2$ のとき

④ から　　$t=\dfrac{1-x}{y-2}$　　　③ に代入して　　$\dfrac{(1-x)(x-1)}{y-2}=y$

両辺に $y-2$ を掛けて整理すると　　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$（ただし $y\neq2$）

[2]　$y=2$ のとき

④ から　　$x=1$

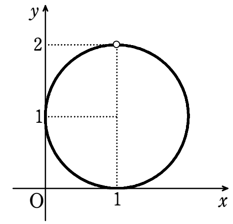
$x=1$, $y=2$ のとき，③ は $t\cdot0=2$ となり，これを満たす t は存在しない。

すなわち，交点 P が点 (1, 2) となることはない。

以上から，求める図形の方程式は

円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　ただし，点 (1, 2) を除く。

また，交点 P の描く図形は右の図のようになる。



6．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

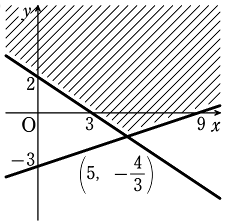
(1) $\begin{cases} x-3y-9<0 \\ 2x+3y-6>0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqq 9 \\ x-y<3 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y\leqq x+1 \\ y\geqq x^2-1 \end{cases}$

解答　(1)〔図〕 境界線を含まない

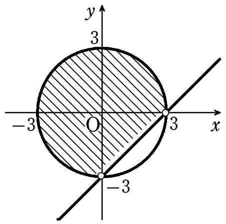
(2)〔図〕 境界線は，円周を含み，直線および直線と円周の交点を含まない

(3)〔図〕 境界線を含む

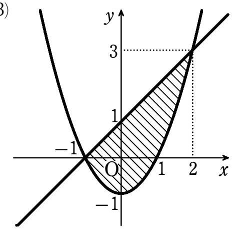
(1)



(2)



(3)



(1)　不等式を変形すると

$$y>\frac{1}{3}x-3,\ \ y>-\frac{2}{3}x+2$$

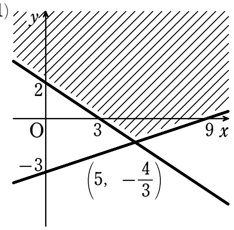
求める領域は，直線 $y=\dfrac{1}{3}x-3$ の上側と，

直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ の上側の共通部分で，

右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

(1)

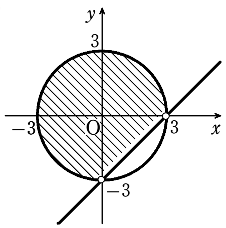


(2)　$x-y<3$ から　　$y>x-3$

求める領域は，円 $x^2+y^2=9$ の周および内部と，直線 $y=x-3$ の上側の共通部分で，右の図の斜線部分。

ただし，境界線は，円周を含み，直線および直線と円周の交点を含まない。

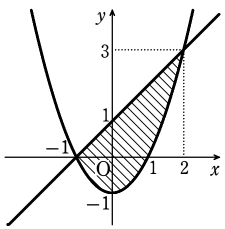
(2)



(3)　求める領域は，直線 $y=x+1$ およびその下側と，放物線 $y=x^2-1$ およびその上側の共通部分で，右の図の斜線部分。

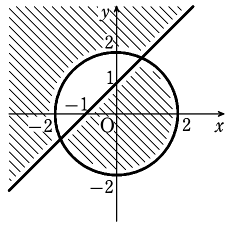
ただし，境界線を含む。

(3)



7．不等式 $(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ の表す領域を図示せよ。

解答　〔図〕 境界線を含まない



$(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ を連立不等式で表すと

$\begin{cases} x-y+1>0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x-y+1<0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases}$

すなわち

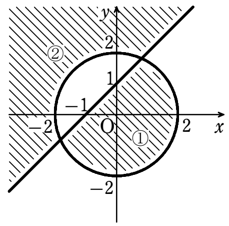
$\begin{cases} y<x+1 \\ x^2+y^2<2^2 \end{cases}$ ……①　または

$\begin{cases} y>x+1 \\ x^2+y^2>2^2 \end{cases}$ ……②

求める領域は，① の表す領域と ② の表す領域の和集合である。

よって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

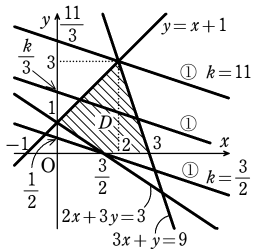


8．x，y が 4 つの不等式 $y\geqq 0$，$y\leqq x+1$，$2x+3y\geqq 3$，$3x+y\leqq 9$ を満たすとき，$x+3y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=3$ のとき 最大値 11；$x=\dfrac{3}{2}$，$y=0$ のとき 最小値 $\dfrac{3}{2}$

与えられた連立不等式の表す領域 D は，4 点 $(0,\ 1)$，$\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 3)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$x+3y=k$ ……① とおくと，① は傾き $-\dfrac{1}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す。この直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。



図から，直線 ① が

点 $(2,\ 3)$ を通るとき　　y 切片 $\dfrac{k}{3}$ は最大値 $\dfrac{11}{3}$ をとり，

点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るとき　y 切片 $\dfrac{k}{3}$ は最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

よって，$x+3y$ は　$x=2$，$y=3$ のとき 最大値 11 をとり，

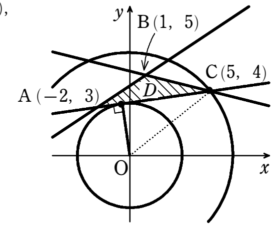
$x=\dfrac{3}{2}$，$y=0$ のとき 最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

9．連立不等式 $x-7y+23\leqq 0$，$2x-3y+13\geqq 0$，$x+4y-21\leqq 0$ の表す領域を D とする。

点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，x^2+y^2 の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$，最小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア) 41　　(イ) $\dfrac{529}{50}$

与えられた連立不等式の表す領域 D は，$\mathrm{A}(-2,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 5)$，$\mathrm{C}(5,\ 4)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の周および内部である。



$x^2+y^2=k$ $(k>0)$ ……① とおくと，① は原点を中心とし，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

この円 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，円 ① が $\mathrm{C}(5,\ 4)$ を通るとき，k は最大で

$$k=\mathrm{OC}^2=5^2+4^2={}^{ア}41$$

また，図から，円 ① が直線 $\mathrm{AC}：x-7y+23=0$ ……② に接するとき，k は最小になる。

このとき，原点と直線 ② の距離が円 ① の半径 $\sqrt{k}$ と一致するから

$$\sqrt{k}=\frac{|0-7\cdot 0+23|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\frac{23}{\sqrt{50}}$$

よって　　$k=\left(\dfrac{23}{\sqrt{50}}\right)^2={}^{イ}\dfrac{529}{50}$