数学演習（不等式の表す領域）R１．６．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

１．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x-2y-2<0 \\ 3x+y-5<0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+3\leqq 0 \\ x+3y-3\geqq 0 \end{cases}$　(3) $-2x^2+1\leqq y<x+4$

２．次の不等式の表す領域を図示せよ。

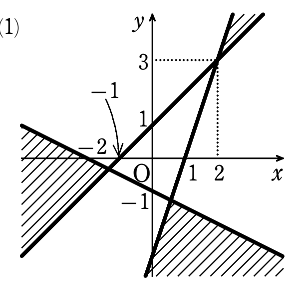
(1) $|2x+5y|\leqq 4$　(2) $|2x|+|y-1|\leqq 5$　(3) $|x-2|\leqq y\leqq -|x-2|+4$

３．次の不等式の表す領域を図示せよ。

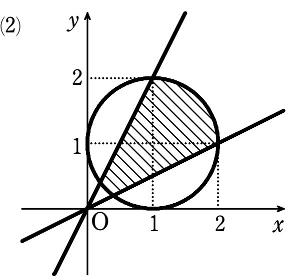
(1) $(x+y-2)(y-x^2)>0$　(2) $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+4x-5)\leqq 0$

４．右の(1)，(2)の図の斜線の部分は，それぞれどのような連立不等式で表されるか。ただし，境界線はすべて含むものとする。

(1)



(2)



5. x, y が 3 つの不等式 $3x-5y \geqq -16$, $3x-y \leqq 4$, $x+y \geqq 0$ を満たすとき，$2x+5y$ の最大値および最小値を求めよ。

6. x, y が 2 つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 10$, $y \geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

7. 連立不等式 $2x-3y \geqq -12$, $5x-y \leqq 9$, $x+5y \geqq 7$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A 上を動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ。

8. 直線 $y=2ax+a^2$ …… ① について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 ① が通りうる領域を図示せよ。

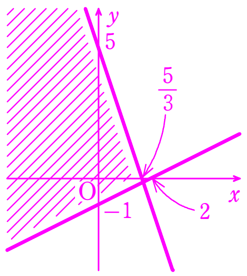
9. 実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く領域を図示せよ。

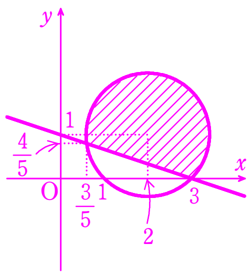
１．次の不等式の表す領域を図示せよ。

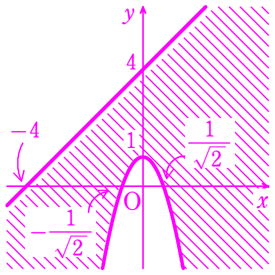
(1) $\begin{cases} x-2y-2<0 \\ 3x+y-5<0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+3\leqq 0 \\ x+3y-3\geqq 0 \end{cases}$　(3) $-2x^2+1\leqq y<x+4$

解答　(1)［図］境界線を含まない　(2)［図］境界線を含む

(3)［図］境界線は，直線 $y=x+4$ は含まないで，他は含む

(1)


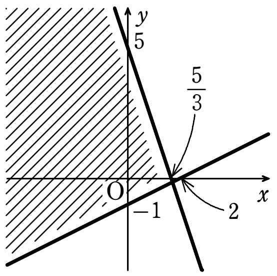
(2)


(3)


解説

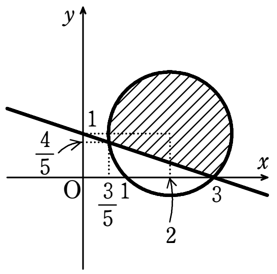
(1)　不等式から　$\begin{cases} y>\dfrac{1}{2}x-1 \\ y<-3x+5 \end{cases}$

求める領域は，直線 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ の上側と直線 $y=-3x+5$ の下側の共通部分で，図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。



(2)　不等式から　$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2\leqq 2 \\ y\geqq -\dfrac{1}{3}x+1 \end{cases}$

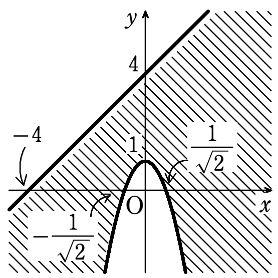
求める領域は，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ の周および内部と直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ およびその上側の部分との共通部分で，図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



(3)　$-2x^2+1\leqq y<x+4$ であるから

$-2x^2+1\leqq y$，$y<x+4$

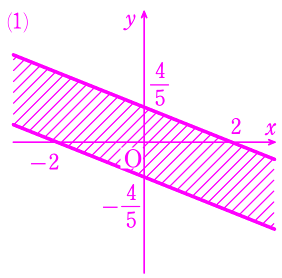
求める領域は，放物線 $y=-2x^2+1$ およびその上側と直線 $y=x+4$ の下側の共通部分で，図の斜線部分。ただし，境界線は，直線 $y=x+4$ は含まないで，他は含む。

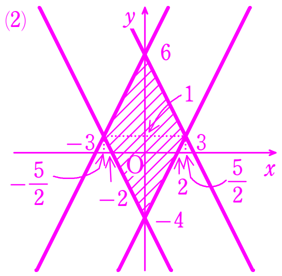


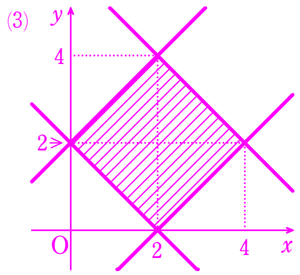
２．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $|2x+5y|\leqq 4$　(2) $|2x|+|y-1|\leqq 5$　(3) $|x-2|\leqq y\leqq -|x-2|+4$

解答　(1)［図］境界線を含む　(2)［図］境界線を含む　(3)［図］境界線を含む

(1)


(2)


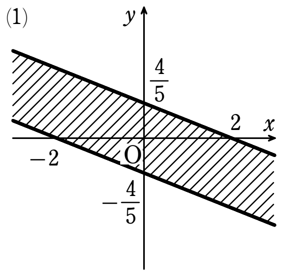
(3)


解説

(1)　$|2x+5y|\leqq 4$ から　$-4\leqq 2x+5y\leqq 4$

ゆえに　$\begin{cases} -4\leqq 2x+5y \\ 2x+5y\leqq 4 \end{cases}$　すなわち　$\begin{cases} y\geqq -\dfrac{2}{5}x-\dfrac{4}{5} \\ y\leqq -\dfrac{2}{5}x+\dfrac{4}{5} \end{cases}$

よって，求める領域は，図(1)の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(1)


(2)　[1]　$x\geqq 0$，$y\geqq 1$ のとき

$2x+y-1\leqq 5$　すなわち　$y\leqq -2x+6$

[2]　$x\geqq 0$，$y<1$ のとき

$2x-(y-1)\leqq 5$　すなわち　$y\geqq 2x-4$

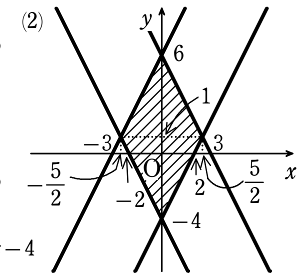
[3]　$x<0$，$y\geqq 1$ のとき

$-2x+y-1\leqq 5$　すなわち　$y\leqq 2x+6$

[4]　$x<0$，$y<1$ のとき

$-2x-(y-1)\leqq 5$　すなわち　$y\geqq -2x-4$

よって，求める領域は，図(2)の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(2)


(3)　[1]　$x\geqq 2$ のとき　$x-2\leqq y\leqq -(x-2)+4$

ゆえに　$\begin{cases} y\geqq x-2 \\ y\leqq -(x-2)+4 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} y\geqq x-2 \\ y\leqq -x+6 \end{cases}$

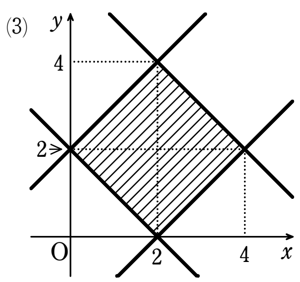
[2]　$x<2$ のとき　$-(x-2)\leqq y\leqq -\{-(x-2)\}+4$

ゆえに　$\begin{cases} y\geqq -(x-2) \\ y\leqq -\{-(x-2)\}+4 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} y\geqq -x+2 \\ y\leqq x+2 \end{cases}$

よって，求める領域は，図(3)の斜線部分。

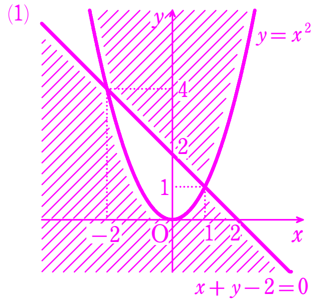
ただし，境界線を含む。

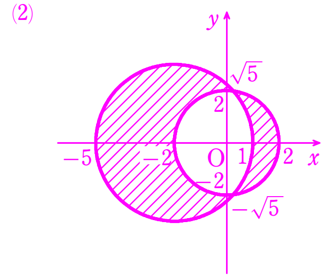
(3)


３．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(x+y-2)(y-x^2)>0$　(2) $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+4x-5)\leqq 0$

解答　(1)［図］境界線を含まない　(2)［図］境界線を含む

(1)


(2)


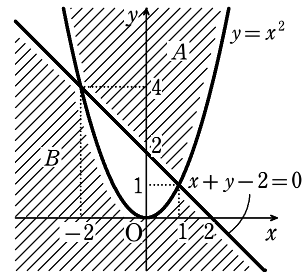
解説

(1)　与えられた不等式から

①　$\begin{cases} x+y-2>0 \\ y-x^2>0 \end{cases}$　または　②　$\begin{cases} x+y-2<0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$

求める領域は，① の表す領域 A と，② の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2)　与えられた不等式を変形すると

$(x^2+y^2-4)\{(x+2)^2+y^2-9\}\leqq 0$

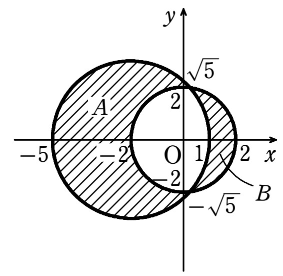
よって

①　$\begin{cases} x^2+y^2-4\geqq 0 \\ (x+2)^2+y^2-9\leqq 0 \end{cases}$　または

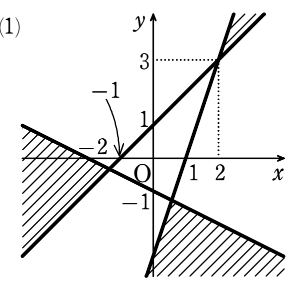
②　$\begin{cases} x^2+y^2-4\leqq 0 \\ (x+2)^2+y^2-9\geqq 0 \end{cases}$

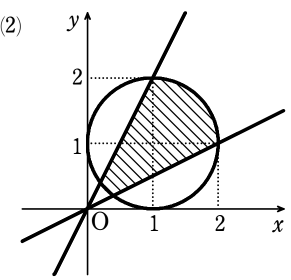
求める領域は，① の表す領域 A と，② の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



４．右の(1)，(2)の図の斜線の部分は，それぞれどのような連立不等式で表されるか。ただし，境界線はすべて含むものとする。

(1)


(2)


解答　(1)　$\begin{cases} y\leqq -\dfrac{1}{2}x-1 \\ y\geqq x+1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y\leqq -\dfrac{1}{2}x-1 \\ y\leqq 3x-3 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y\geqq x+1 \\ y\leqq 3x-3 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} y\geqq \dfrac{1}{2}x \\ y\leqq 2x \\ (x-1)^2+(y-1)^2\leqq 1 \end{cases}$

解説

(1)　境界線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{2}x-1$，$y=x+1$，$y=3x-3$

よって $\begin{cases} y\leqq -\dfrac{1}{2}x-1 \\ y\geqq x+1 \end{cases}$ または $\begin{cases} y\leqq -\dfrac{1}{2}x-1 \\ y\leqq 3x-3 \end{cases}$ または $\begin{cases} y\geqq x+1 \\ y\leqq 3x-3 \end{cases}$

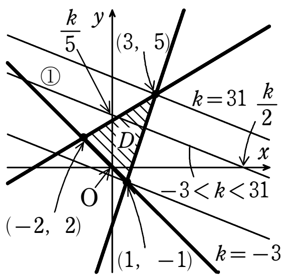
(2) 境界線の方程式は　$y=\dfrac{1}{2}x$，$y=2x$，$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

よって，連立不等式は　$y\geqq\dfrac{1}{2}x$，$y\leqq 2x$，$(x-1)^2+(y-1)^2\leqq 1$

5．x，y が 3 つの不等式 $3x-5y\geqq -16$，$3x-y\leqq 4$，$x+y\geqq 0$ を満たすとき，$2x+5y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=5$ のとき最大値 31；$x=1$，$y=-1$ のとき最小値 -3

解説



与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，領域 D は，3 点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 2)$，$(3,\ 5)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$2x+5y=k$ ……①　とおくと，これは傾き $-\dfrac{2}{5}$，

y 切片 $\dfrac{k}{5}$ の直線を表す。

この直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，k の値は，直線 ① が点 $(3,\ 5)$ を通るとき最大になり，点 $(1,\ -1)$ を通るとき最小になる。

よって，$2x+5y$ は

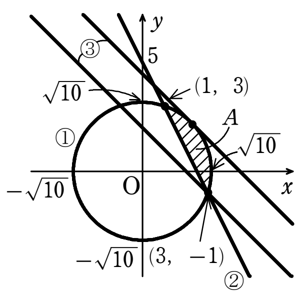
$x=3$，$y=5$　のとき最大値 $2\cdot3+5\cdot5=31$；

$x=1$，$y=-1$ のとき最小値 $2\cdot1+5\cdot(-1)=-3$　をとる。

6．x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

解説



$x^2+y^2=10$ ……①，$y=-2x+5$ ……② とする。

連立方程式 ①，② を解くと

$(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(3,\ -1)$

連立不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ の表す領域 A は図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x+y=k$　……③

とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

図から，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大になる。

①，③ を連立して　$x^2+(k-x)^2=10$　　整理して　$2x^2-2kx+k^2-10=0$　……④

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線 ③ が円 ① に接するための条件は　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=-k^2+20$

ゆえに，$-k^2+20=0$ から　$k=\pm 2\sqrt{5}$

第 1 象限では $x>0$，$y>0$ であるから，③ より $k>0$ で　$k=2\sqrt{5}$

このとき，④ の重解は　$x=-\dfrac{-2\cdot 2\sqrt{5}}{2\cdot 2}=\sqrt{5}$　　③ から　$y=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

次に，直線 ② の傾きは -2，直線 ③ の傾きは -1 で，$-2<-1$ であるから，図より，k の値が最小となるのは，直線 ③ が点 $(3,\ -1)$ を通るときである。

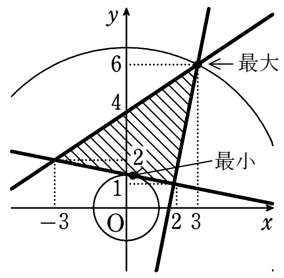
このとき，k の値は　$3+(-1)=2$

よって　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

7．連立不等式 $2x-3y\geqq -12$，$5x-y\leqq 9$，$x+5y\geqq 7$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A 上を動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=6$ のとき最大値 45；$x=\dfrac{7}{26}$，$y=\dfrac{35}{26}$ のとき最小値 $\dfrac{49}{26}$

解説



領域 A は，3 点 $(3,\ 6)$，$(2,\ 1)$，$(-3,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x^2+y^2=k$ ……① とおくと

$k>0$ のとき，① は原点を中心とする半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

x^2+y^2 の値の範囲は，円 ① が領域 A と共有点をもつような k の値の範囲である。

図から，円 ① が点 $(3,\ 6)$ を通るとき，k は最大になり，その値は　$k=3^2+6^2=45$

また，円 ① が直線 $x+5y=7$ ……② に接するとき，k は最小になる。

①，② から x を消去して整理すると　$26y^2-70y+49-k=0$　……③

円 ① が直線 ② に接するための条件は，③ の判別式を D とすると　$D=0$

ここで，$\dfrac{D}{4}=(-35)^2-26\cdot(49-k)=26k-49$ から　$k=\dfrac{49}{26}$

このとき，③ の重解は　$y=-\dfrac{-70}{2\cdot 26}=\dfrac{35}{26}$

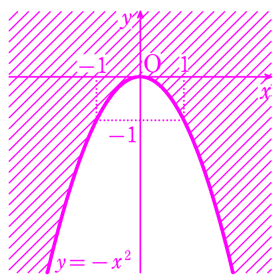
よって，② から　$x=7-5\cdot\dfrac{35}{26}=\dfrac{7}{26}$

したがって　$x=3$，$y=6$ のとき最大値 45；

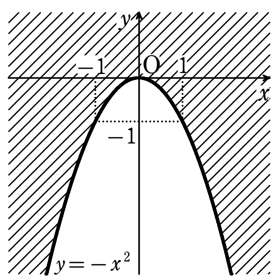
$x=\dfrac{7}{26}$，$y=\dfrac{35}{26}$ のとき最小値 $\dfrac{49}{26}$

8．直線 $y=2ax+a^2$ ……① について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 ① が通りうる領域を図示せよ。

解答　[図] 境界線を含む



解説



① を a について整理すると

$a^2+2x\cdot a-y=0$　……②

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るための条件は，a の 2 次方程式 ② が実数解をもつことである。

よって，2 次方程式 ② の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

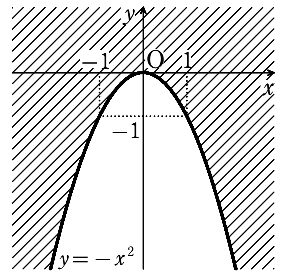
ここで　$\dfrac{D}{4}=x^2-1\cdot(-y)=x^2+y$

ゆえに，$x^2+y\geqq 0$ から　$y\geqq -x^2$

求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

別解　① において，$x=X$ のとき　$y=2aX+a^2$



これを a の関数とみると　$y=(a+X)^2-X^2$

y は $a=-X$ のとき最小値 $-X^2$ をとるから，a がすべての実数値をとって動くとき　$y\geqq -X^2$

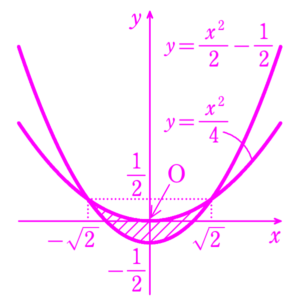
X はすべての実数値をとりうるから，X を x におき換えると　$y\geqq -x^2$

求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

9．実数 x，y が $x^2+y^2\leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く領域を図示せよ。

解答　[図] 境界線を含む



解説

$X=x+y$，$Y=xy$ とおく。

$x^2+y^2\leqq 1$ から　$(x+y)^2-2xy\leqq 1$　すなわち　$X^2-2Y\leqq 1$

したがって　$Y\geqq\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2}$　……①

また，x，y は 2 次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち $t^2-Xt+Y=0$ の 2 つの実数解であるから，判別式を D とすると　$D\geqq 0$

ここで　$D=(-X)^2-4\cdot 1\cdot Y=X^2-4Y$

よって，$X^2-4Y\geqq 0$ から　$Y\leqq\dfrac{X^2}{4}$　……②

①，② から　$\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2}\leqq Y\leqq\dfrac{X^2}{4}$

変数を x，y におき換えて

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{x^2}{4}$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。