数学演習（不等式の表す領域）Ｈ２４．２．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

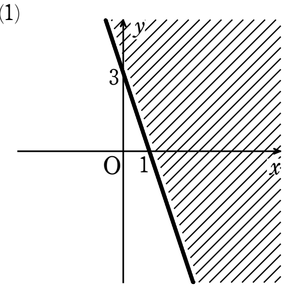
１．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2<4$　　(2)　$x^2+y^2\geqq 25$　　(3)　$x^2+(y-4)^2\leqq 16$

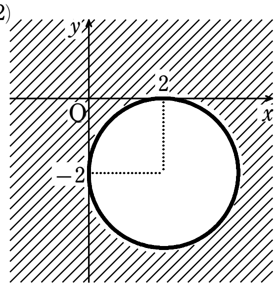
(4)　$x^2+y^2\geqq 4x-2y-1$　　(5)　$x^2+y^2+6x-4y+12<0$

２．下の図の斜線部分は，どのような不等式で表されるか。ただし，境界線を含まない。

(1)



(2)



３．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-3y>6 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ x+y<3 \end{cases}$

(3)　$1\leqq x^2+y^2\leqq 9$　　(4)　$-3<x+3y<3$

４．連立不等式 $x-y-1\leqq 0$，$x+y-1\geqq 0$，$x^2+y^2\leqq 2x$ の表す領域を図示せよ。また，この領域の面積を求めよ。

５．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$xy<0$　　(2)　$(x-y)(x+2y)\geqq 0$

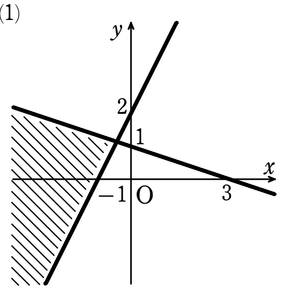
(3)　$(x+y-3)(2x-y+6)<0$　　(4)　$(x+y-3)(x^2+y^2-9)<0$

６．次の不等式の表す領域を図示せよ。

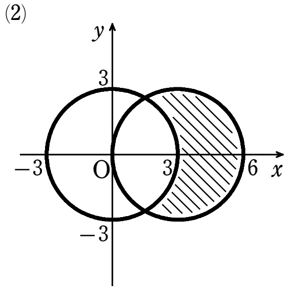
(1)　$y\geqq x^2+4x$　　(2)　$(x^2-y)(x-y+2)>0$

7．右の図の斜線部分は，どのような連立不等式で表されるか。ただし，境界線は領域に含めないものとする。

(1)



(2)



8．x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+2y \leqq 12$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，次の式の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　(2)　$2x+5y$

9．x，y が 4 つの不等式 $y \geqq 0$，$y \leqq x+1$，$2x+3y \geqq 3$，$3x+y \leqq 9$ を満たすとき，$x+3y$ の最大値および最小値を求めよ。

10．x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x-2y+8 \geqq 0$，$3x+y-18 \leqq 0$ を満たすとき，$x-4y$ のとる値の最大値および最小値を求めよ。

11．$x^2+y^2 \leqq 9$，$x \geqq 0$ のとき，$-x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

12．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y \geqq |x-1|$　　(2)　$y \leqq -2|x|+4$　　(2)　$|x|+2|y|<8$

数学演習（不等式の表す領域）Ｈ２４．２．２９　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2<4$　　(2)　$x^2+y^2\geqq 25$　　(3)　$x^2+(y-4)^2\leqq 16$

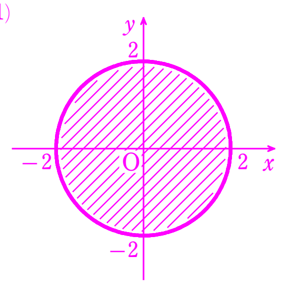
(4)　$x^2+y^2\geqq 4x-2y-1$　　(5)　$x^2+y^2+6x-4y+12<0$

解答　(1)　[図]，境界線を含まない　(2)　[図]，境界線を含む

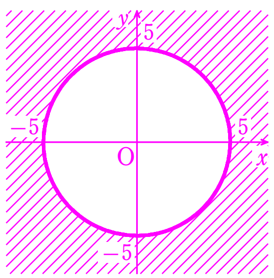
(3)　[図]，境界線を含む　(4)　[図]，境界線を含む

(5)　[図]，境界線を含まない

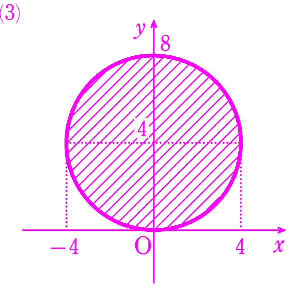
(1)



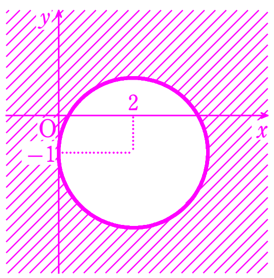
(2)



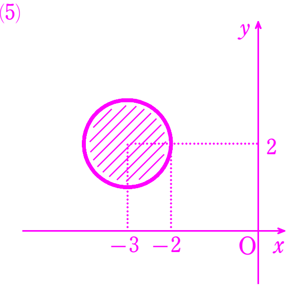
(3)



(4)



(5)

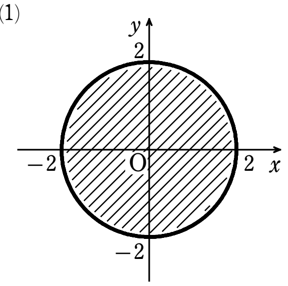


解説

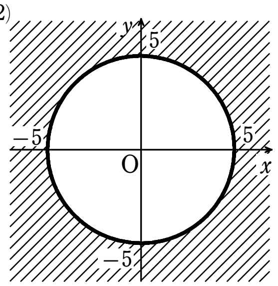
(1)　求める領域は，円 $x^2+y^2=4$ の内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(2)　求める領域は，円 $x^2+y^2=25$ およびその外部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(1)



(2)

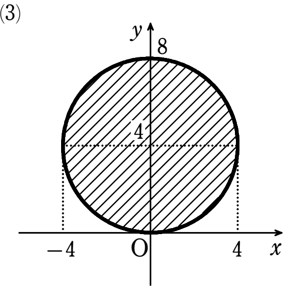


(3)　求める領域は，円 $x^2+(y-4)^2=16$ およびその内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

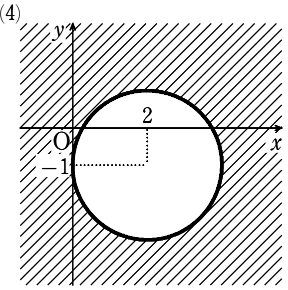
(4)　$x^2+y^2\geqq 4x-2y-1$ から　$(x-2)^2+(y+1)^2\geqq 4$

よって，求める領域は，円 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ およびその外部で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

(3)



(4)

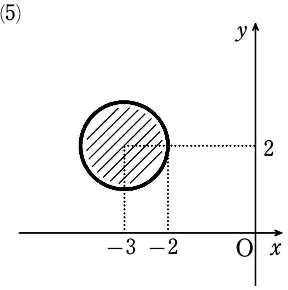


(5)　$x^2+y^2+6x-4y+12<0$ から

$(x+3)^2+(y-2)^2<1$

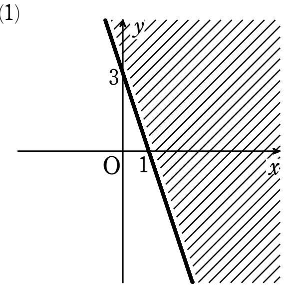
よって，求める領域は，円 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ の内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(5)

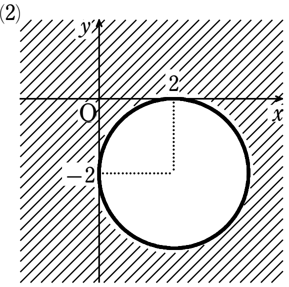


2．下の図の斜線部分は，どのような不等式で表されるか。ただし，境界線を含まない。

(1)



(2)



解答　(1)　$y>-3x+3$　(2)　$(x-2)^2+(y+2)^2>4$

解説

(1)　境界線の直線の方程式は　$y=-3x+3$

よって，求める領域は直線の上側の部分であるから　$y>-3x+3$

(2)　境界線の円の方程式は　$(x-2)^2+(y+2)^2=4$

よって，求める領域は円の外部であるから　$(x-2)^2+(y+2)^2>4$

3．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

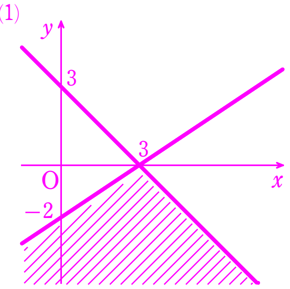
(1)　$\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-3y>6 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ x+y<3 \end{cases}$

(3)　$1\leqq x^2+y^2\leqq 9$　　(4)　$-3<x+3y<3$

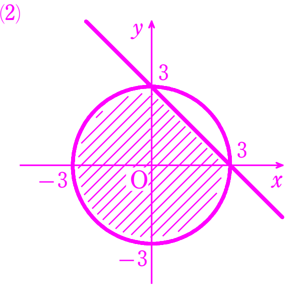
解答　(1)　[図]，境界線を含まない　(2)　[図]，境界線を含まない

(3)　[図]，境界線を含む　(4)　[図]，境界線を含まない

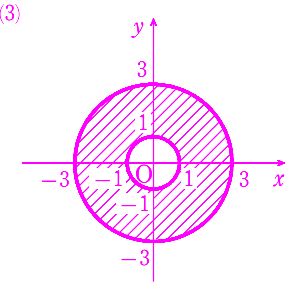
(1)



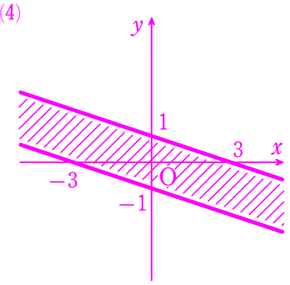
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　$x+y<3$ から　$y<-x+3$

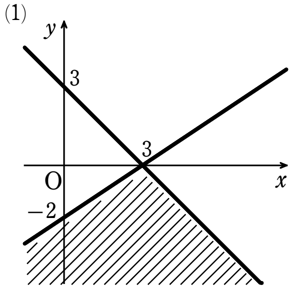
$2x-3y>6$ から　$y<\frac{2}{3}x-2$

よって，求める領域は，直線 $y=-x+3$ の下側と直線 $y=\frac{2}{3}x-2$ の下側の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

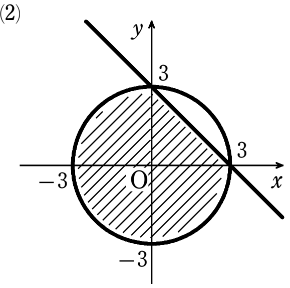
(2)　$x+y<3$ から　$y<-x+3$

よって，求める領域は，円 $x^2+y^2=9$ の内部と直線 $y=-x+3$ の下側の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(1)



(2)



(3)　不等式から　$x^2+y^2\geqq 1$　かつ　$x^2+y^2\leqq 9$

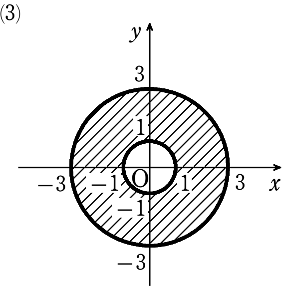
よって，求める領域は，円 $x^2+y^2=1$ およびその外部と，円 $x^2+y^2=9$ およびその内部の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(4)　不等式から　$x+3y>-3$　かつ　$x+3y<3$

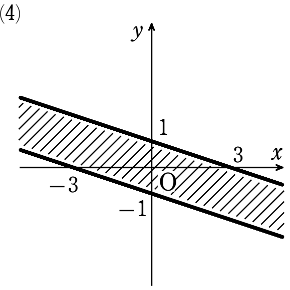
すなわち　$y>-\frac{1}{3}x-1$　かつ　$y<-\frac{1}{3}x+1$

よって，求める領域は，直線 $y=-\frac{1}{3}x-1$ の上側と直線 $y=-\frac{1}{3}x+1$ の下側の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(3)

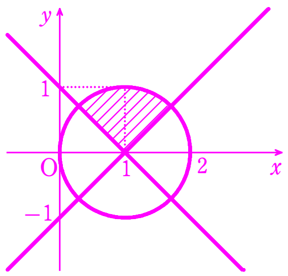


(4)



4．連立不等式 $x-y-1\leqq 0$，$x+y-1\geqq 0$，$x^2+y^2\leqq 2x$ の表す領域を図示せよ。また，この領域の面積を求めよ。

解答　[図]，境界線を含む。面積 $\frac{1}{4}\pi$



解説

$x-y-1\leqq 0$ から　　$y\geqq x-1$

$x+y-1\geqq 0$ から　　$y\geqq -x+1$

$x^2+y^2\leqq 2x$ から　　$(x-1)^2+y^2\leqq 1$

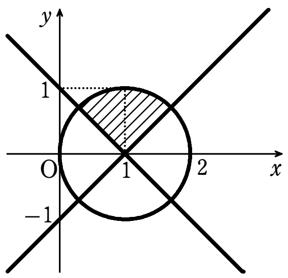
よって，求める領域は右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

2直線の傾きは1と−1なので，積は−1となる

よって2 直線 $x-y-1=0$，$x+y-1=0$ は点 $(1,\ 0)$ で直交するから，領域は中心角90°の扇形。

面積は　　$\pi\times 1^2\times\frac{90^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{4}\pi$



5．次の不等式の表す領域を図示せよ。

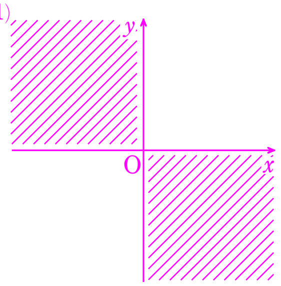
(1)　$xy<0$　　　(2)　$(x-y)(x+2y)\geqq 0$

(3)　$(x+y-3)(2x-y+6)<0$　　　(4)　$(x+y-3)(x^2+y^2-9)<0$

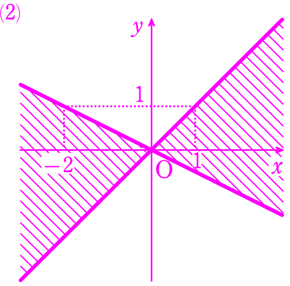
解答　(1)　[図]，境界線を含まない　　(2)　[図]，境界線を含む

(3)　[図]，境界線を含まない　　(4)　[図]，境界線を含まない

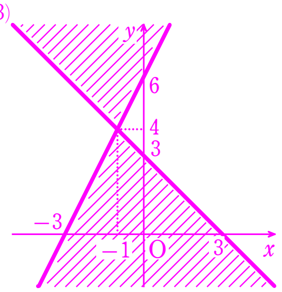
(1)



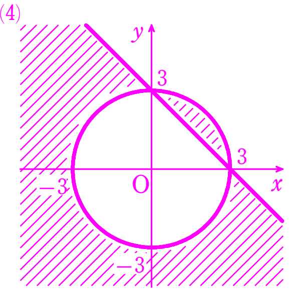
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　与えられた不等式は　$\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x<0\\y>0\end{cases}$

よって，求める領域は [図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(2)　与えられた不等式は

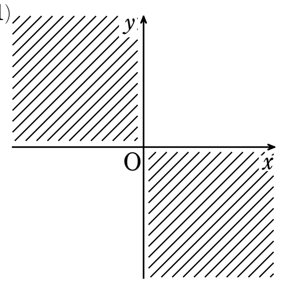
$\begin{cases}x-y\geqq 0\\x+2y\geqq 0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x-y\leqq 0\\x+2y\leqq 0\end{cases}$

すなわち　$\begin{cases}y\leqq x\\y\geqq -\frac{1}{2}x\end{cases}$　または　$\begin{cases}y\geqq x\\y\leqq -\frac{1}{2}x\end{cases}$

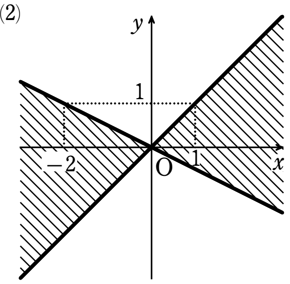
よって，求める領域は [図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

(1)



(2)



(3)　与えられた不等式は

$\begin{cases}x+y-3>0\\2x-y+6<0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x+y-3<0\\2x-y+6>0\end{cases}$

すなわち　$\begin{cases}y>-x+3\\y>2x+6\end{cases}$　または　$\begin{cases}y<-x+3\\y<2x+6\end{cases}$

よって，求める領域は [図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(4)　与えられた不等式は

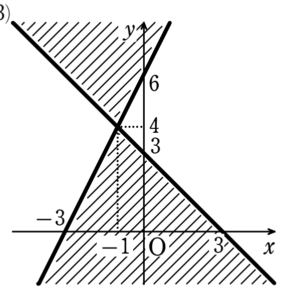
$\begin{cases}x+y-3>0\\x^2+y^2-9<0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x+y-3<0\\x^2+y^2-9>0\end{cases}$

すなわち　$\begin{cases}y>-x+3\\x^2+y^2<9\end{cases}$　または　$\begin{cases}y<-x+3\\x^2+y^2>9\end{cases}$

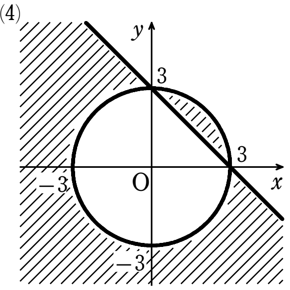
よって，求める領域は [図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(3)



(4)

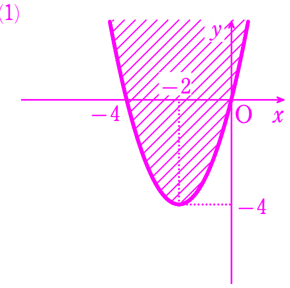


6．次の不等式の表す領域を図示せよ。

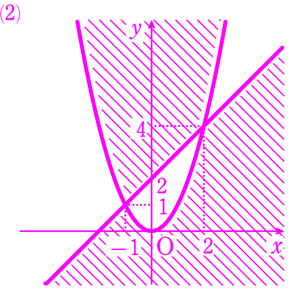
(1)　$y\geqq x^2+4x$　　　(2)　$(x^2-y)(x-y+2)>0$

解答　(1)　[図]，境界線を含む　　(2)　[図]，境界線を含まない

(1)



(2)



解説

(1)　$y\geqq x^2+4x$ から　　$y\geqq (x+2)^2-4$

よって，求める領域は，放物線 $y=(x+2)^2-4$ およびその上側で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

(2)　与えられた不等式は

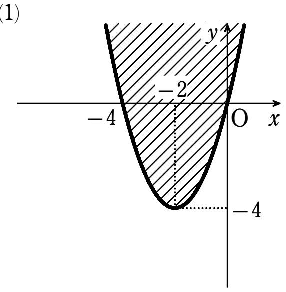
$\begin{cases}x^2-y>0\\x-y+2>0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x^2-y<0\\x-y+2<0\end{cases}$

すなわち　$\begin{cases}y<x^2\\y<x+2\end{cases}$　または　$\begin{cases}y>x^2\\y>x+2\end{cases}$

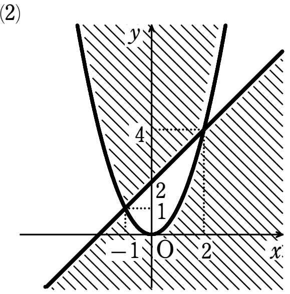
よって，求める領域は [図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(1)

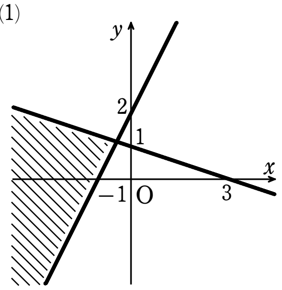


(2)

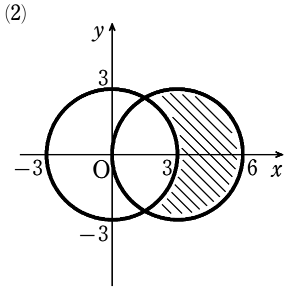


7．右の図の斜線部分は，どのような連立不等式で表されるか。ただし，境界線は領域に含めないものとする。

(1)



(2)



解答　(1)　$\begin{cases} y<-\dfrac{x}{3}+1 \\ y>2x+2 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2>9 \\ (x-3)^2+y^2<9 \end{cases}$

解説

(1)　2 点 (3，0)，(0，1) を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{3}+y=1 \quad すなわち \quad y=-\frac{x}{3}+1$$

斜線部分は，この直線の下側であるから

$$y<-\frac{x}{3}+1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，2 点 (−1，0)，(0，2) を通る直線の方程式は

$$-x+\frac{y}{2}=1 \quad すなわち \quad y=2x+2$$

斜線部分は，この直線の上側であるから　　$y>2x+2$　……②

よって，与えられた図の斜線部分は，①，② の共通部分であるから

$$\begin{cases} y<-\dfrac{x}{3}+1 \\ y>2x+2 \end{cases}$$

(2)　原点を中心とし，半径 3 の円の方程式は

$$x^2+y^2=9$$

斜線部分は，この円の外部であるから

$$x^2+y^2>9 \quad \cdots\cdots ①$$

点 (3，0) を中心とし，半径 3 の円の方程式は

$$(x-3)^2+y^2=9$$

斜線部分は，この円の内部であるから

$$(x-3)^2+y^2<9 \quad \cdots\cdots ②$$

よって，与えられた図の斜線部分は，①，② の共通部分であるから

$$\begin{cases} x^2+y^2>9 \\ (x-3)^2+y^2<9 \end{cases}$$

8．x，y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$3x+2y\leqq 12$，$x+2y\leqq 8$ を満たすとき，次の式の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　　　(2)　$2x+5y$

解答　(1)　$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

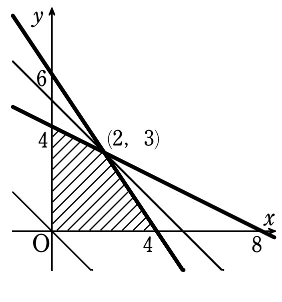
(2)　$x=0$，$y=4$ のとき最大値 20；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

解説

連立方程式 $3x+2y=12$，$x+2y=8$ を解くと

$$x=2,\ y=3$$

であるから，与えられた連立不等式の表す領域は，4 点 (0，0)，(4，0)，(0，4)，(2，3) を頂点とする四角形の内部および周である。



(1)　$x+y=k$　……① とおくと，$y=-x+k$ と表すことができる。これは傾き −1，

y 切片 k の直線を表す。

y 切片がkであるから，高い所を通過するほど，k の値は大きくなっていく。

図から，直線 ① が点 (2，3) を通るとき，領域内で一番高い所を通過しているのでk の値は最大となる。

このとき$(x, y)=(2, 3)$より①から　　$k=2+3=5$

また，直線 ① が点 (0，0) を通るとき，領域内で最も低い所を通過しているのでk の値は最小となる。

このとき$(x, y)=(0, 0)$　より①から　　$k=0$

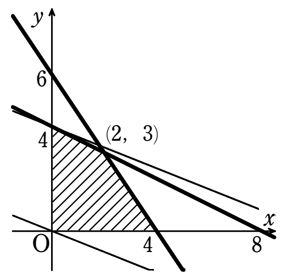
よって，$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5；

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

(2)　$2x+5y=k$　……② とおくと，$y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}k$

と表すことができる。これは傾き $-\dfrac{2}{5}$，

y 切片 $\dfrac{k}{5}$ の直線を表す。



y 切片が$\dfrac{k}{5}$であるから，高い所を通過するほど，k の値は大きくなっていく。

図から，直線 ② が点 (0，4) を通るとき，領域内で一番高い所を通過するのでk の値は最大となる。

このとき$(x, y)=(0, 4)$より②から　$k=2\cdot 0+5\cdot 4=20$

（$(2, 3)$を通るとき，②より$k=2\cdot 2+5\cdot 3=19$

となるので，$(0, 4)$を通るときに及ばない）

また，直線 ② が点 (0，0) を通るとき，領域内で一番低い場所を通過するのでk の値は最小となる。このとき$(x, y)=(0, 0)$より②から　　$k=2\cdot 0+5\cdot 0=0$

よって，$x=0$，$y=4$ のとき最大値 20；

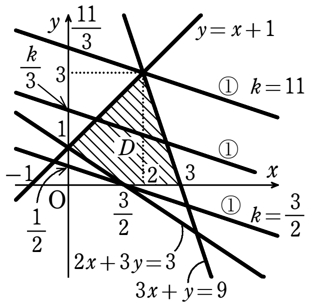
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

9．x，y が 4 つの不等式 $y\geqq 0$，$y\leqq x+1$，$2x+3y\geqq 3$，$3x+y\leqq 9$ を満たすとき，$x+3y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=3$ のとき 最大値 11；$x=\dfrac{3}{2}$，$y=0$ のとき 最小値 $\dfrac{3}{2}$

解説

与えられた連立不等式の表す領域 D は，4 点 (0，1)，$\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，(3，0)，(2，3) を頂点とする四角形の周および内部である。



$x+3y=k$　……① とおくと，$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}k$

と表すことができる。よって① は傾き $-\dfrac{1}{3}$，y 切片

$\dfrac{k}{3}$ の直線を表す。y 切片が$\dfrac{k}{3}$であるから，

高い所を通過するほど，kの値は大きくなっていく。

この直線 ① が領域 D と共有点を

もつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

つまり，領域内の一番高い所を通過するときと，一番低い所を通過するときを考える。

図から，直線 ① が

点 (2，3) を通るとき　　y 切片 $\dfrac{k}{3}$ は最大値 $\dfrac{11}{3}$ をとり，

点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るとき　y 切片 $\dfrac{k}{3}$ は最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

よって，$x+3y$ は　　$x=2$，$y=3$ のとき 最大値 11 をとり，

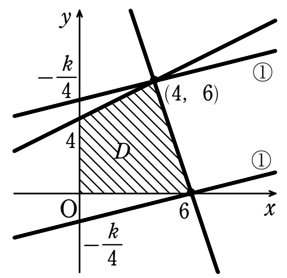
$x=\dfrac{3}{2}$，$y=0$ のとき 最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

10．x，y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x-2y+8\geqq 0$，$3x+y-18\leqq 0$ を満たすとき，$x-4y$ のとる値の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=6$，$y=0$ のとき最大値 6；$x=4$，$y=6$ のとき最小値 −20

解説

与えられた連立不等式の表す領域 D は，4 点 (0，4)，(0，0)，(6，0)，(4，6) を頂点とする四角形の周および内部である。



ここで，$x-4y=k$ ……① とおくと，① は傾き $\dfrac{1}{4}$，

y 切片 $-\dfrac{k}{4}$ の直線を表す。

y 切片が$-\dfrac{k}{4}$であるから，高い所を通過するほど，k の値は小さくなっていく。…（※）

この直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，直線 ① が，点 (6，0) を通るとき 領域内で最も低い所を通過する。ゆえに（※）よりこのときkの値が最大となる。逆に点 (4，6) を通るとき 領域内で最も高い所を通過する。ゆえに（※）よりこのときkの値が最小となる。

したがって，$x-4y$ は

$x=6$，$y=0$　のとき，①より$k=6-4\cdot 0=6$より最大値 6，

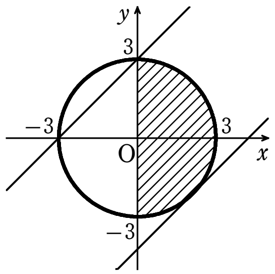
$x=4$，$y=6$　のとき，①より$k=4-4\cdot 6=-20$より最小値 −20 をとる。

11．$x^2+y^2\leqq 9$，$x\geqq 0$ のとき，$-x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　最大値 3，最小値 $-3\sqrt{2}$

解説

与えられた不等式の表す領域は右図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



$$-x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，① は$y=x+k$と表すことができるので
傾き 1，y 切片 k の直線を表す。
図から，直線 ① が点 (0，3) を通るとき，領域内で一番高い所を通過するのでk の値は最大となる。
このとき①より　　$k=0+3=3$
また，直線 ① が領域内で円と接するとき，
領域内で一番低い所を通過するのでk の値は最小となる。
このとき，円と直線が接するので円の中心 (0，0) と直線 ① の距離が円の半径 3 に等しい。
直線①は$x-y+k=0$となるので

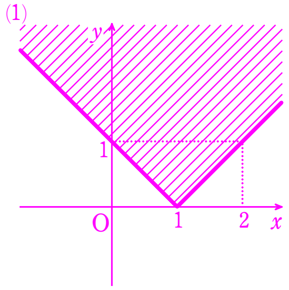
$$\frac{|0-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{|k|}{\sqrt{2}}=3 \quad \text{より} \quad |k|=3\sqrt{2}$$

つまり　$k=\pm3\sqrt{2}$　となるが，図より明らかに$k<0$　であるから　$k=-3\sqrt{2}$
以上から，最大値は　3，最小値は　$-3\sqrt{2}$

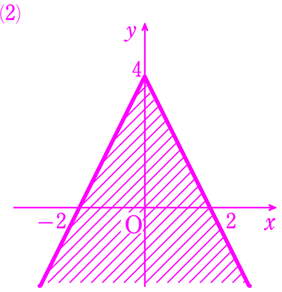
12. 次の不等式の表す領域を図示せよ。
(1)　$y\geqq|x-1|$　　(2)　$y\leqq-2|x|+4$　　(2)　$|x|+2|y|<8$

解答　(1)　[図]　境界線を含む　　(2)　[図]　境界線を含む

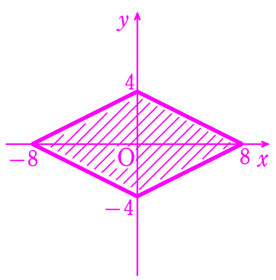
(1)



(2)



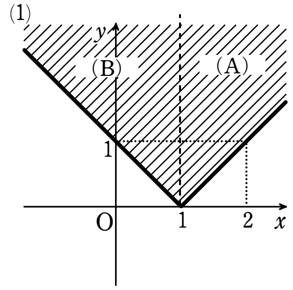
(3)　[図]，境界線を含まない



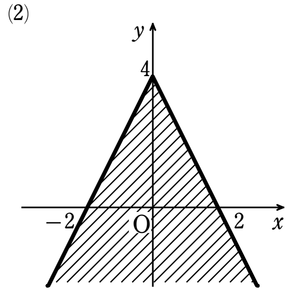
解説

(1)　$x\geqq1$ のとき，$|x-1|=x-1$　　であるから　　$y\geqq x-1$
つまり，領域$x\geqq1$と領域$y\geqq x-1$の共通部分（A）を書く
$x<1$ のとき，$|x-1|=-(x-1)$ であるから　　$y\geqq-x+1$
つまり，領域$x<1$と領域$y<-x+1$の共通部分（B）を書く
そして，２つの領域（A），（B）をくっつけたものが求める領域である
(2)　$x\geqq0$ のとき，$|x|=x$　 であるから　　$y\leqq-2x+4$
$x<0$ のとき，$|x|=-x$ であるから　　$y\leqq2x+4$
以上から，求める領域は上記の２つの部分をくつけた図の斜線部分。
ただし，境界線を含む。

(1)

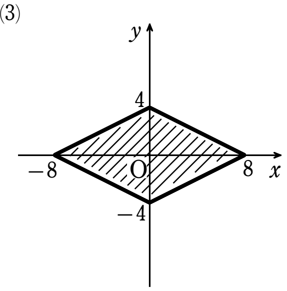


(2)



(3)　$|x|+2|y|<8$　……①
$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき（つまり第１象限），
① は　　$x+2y<8$
$x\geqq0$，$y<0$ のとき（つまり第４象限），
① は　　$x-2y<8$
$x<0$，$y\geqq0$ のとき（つまり第２象限），
① は　　$-x+2y<8$
$x<0$，$y<0$ のとき（つまり第３象限），
① は　　$-x-2y<8$

(3)



よって，求める領域は，上記の４つの部分をくっつけた図の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。