数学演習（図形と方程式•軌跡）Ｈ２０．７．２４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1. ２点 $A(0,1)$, $B(3,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

2. $AB=6$ である２定点 A, B に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

3. ２点 $A(0,0)$, $B(6,0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=-2x^2+(a-1)x+a+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

5. ２点 $A(5,-3)$, $B(1,6)$ と円 $x^2+y^2=9$ の周上の動点を Q とするとき，$\triangle ABQ$ の重心 P の軌跡を求めよ。

6. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる２点 A, B で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

7. 3 点 A (1, 1), B (3, 5), C (5, 2) について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　(2)　線分 BC の長さ

(3)　点 A と直線 BC の距離　　(4)　△ABC の面積

8. 直線 ℓ ： $x+y+1=0$ に関して点 P$(3,\ 2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

9. 円 $x^2+2x+y^2=1$ …… ① と直線 $y=mx-m$ …… ② が異なる 2 点で交わるような，定数 m の値の範囲を求めよ。

10. 点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

11. 2 円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ。また，2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

数学演習（図形と方程式・軌跡）H２０．７．２４　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ 　）

1. 2点 $A(0,1)$, $B(3,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

点 $P(x, y)$ とおくと

$AP = BP$

$\Leftrightarrow AP^2 = BP^2$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y-4)^2$

∴ 整理すると

$x+y-4=0$

求める軌跡は

直線 $x+y-4=0$

2. $AB=6$ である2定点 A, B に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

$A(3, 0)$, $B(-3, 0)$

$P(x, y)$ とおくと

$AP^2+BP^2=26$

$\Leftrightarrow \{(x-3)^2+(y-0)^2\} + \{(x+3)^2+(y-0)^2\} = 26$

∴ 整理して

$x^2+y^2=4$

よって求める軌跡は

AB の中点を中心とする半径2の円

3. 2点 $A(0,0)$, $B(6,0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

点 $P(x, y)$ とおくと

$AP : BP = 2:1$

$\Leftrightarrow AP = 2BP$

$\Leftrightarrow AP^2 = 4BP^2$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2 = 4\{(x-6)^2+(y-0)^2\}$

整理して

$x^2+y^2-16x+48=0$

$(x-8)^2+y^2=16$

求める軌跡は

中心 $(8, 0)$ 半径4の円

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=-2x^2+(a-1)x+a+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

$y=-2x^2+(a-1)x+a+1$

$= -2\left(x^2-\frac{a-1}{2}x\right)+a+1$

$= -2\left\{\left(x-\frac{a-1}{4}\right)^2-\left(\frac{a-1}{4}\right)^2\right\}+a+1$

$= -2\left(x-\frac{a-1}{4}\right)^2+2\left(\frac{a-1}{4}\right)^2+a+1$

点 $P(x, y)$ とおくと

$\begin{cases} x=\frac{a-1}{4} \\ y=2\left(\frac{a-1}{4}\right)^2+a+1 \end{cases}$

$a=4x+1$ を下式に代入して

$y=2x^2+4x+2$

求める軌跡は

放物線 $y=2x^2+4x+2$

5. 2点 $A(5, -3)$, $B(1, 6)$ と円 $x^2+y^2=9$ の周上の動点を Q とするとき，$\triangle ABQ$ の重心 P の軌跡を求めよ。

点 $Q(s, t)$, $P(x, y)$ とおくと

点 Q は円上の点より

$s^2+t^2=9$ …(*)

また，$\triangle ABQ$ の重心が P より

$(x, y) = \left(\frac{5+1+s}{3}, \frac{-3+6+t}{3}\right)$

∴ $\begin{cases} x=\frac{6+s}{3} \\ y=\frac{3+t}{3} \end{cases}$

これを $s=3x-6$

$t=3y-3$

として(*)に代入して

$(3x-6)^2+(3y-3)^2=9$

∴ $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

中心 $(2, 1)$ 半径1の円

6. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる2点 A, B で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

$x^2=m(x-1)$

$x^2-mx+m=0$

異なる2点で交わるので

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot m>0$

$m(m-4)>0$

∴ $m<0$, $m>4$

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

$A(\alpha, m(\alpha-1))$, $B(\beta, m(\beta-1))$

とおき，点 $P(x, y)$ とすると

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{m(\alpha-1)+m(\beta-1)}{2}$

$=\frac{m(\alpha+\beta-2)}{2}$

ここで α, β は

2次方程式 $x^2=m(x-1)$

の2解より，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=m$

よって

$\begin{cases} x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2} \cdots (*) \\ y=\frac{m(m-2)}{2} \end{cases}$

ここから m を消去して

$y=2x^2-2x$

また (1) と (*) より

$m<0$, $m>4$

∴ $\frac{m}{2}<0$, $\frac{m}{2}>2$

∴ $x<0$, $x>2$

求める軌跡は

放物線 $y=2x^2-2x$

の $x<0$, $x>2$ の部分

7. 3点 A(1, 1), B(3, 5), C(5, 2) について，次のものを求めよ。

(1) 直線 BC の方程式　(2) 線分 BC の長さ

(3) 点 A と直線 BC の距離　(4) △ABC の面積

(1)

$y-5=\frac{2-5}{5-3}(x-3)$

∴ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{19}{2}$

(2)

$BC=\sqrt{(5-3)^2+(2-5)^2}$

$=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(3)

(1) より

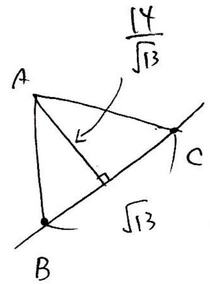
$2y=-3x+19$ つまり $3x+2y-19=0$

よって

$d=\frac{|3\cdot1+2\cdot1-19|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|3+2-19|}{\sqrt{13}}=\frac{|-14|}{\sqrt{13}}$

$=\frac{14}{\sqrt{13}}$

(4)



(2)(3) より

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{14}{\sqrt{13}}=7$

8. 直線 ℓ：$x+y+1=0$ に関して点 P(3, 2) と対称な点 Q の座標を求めよ。

点 Q(a, b) とおくと

$x+y+1=0$

$\therefore\ y=-x-1$

よって $PQ \perp \ell$

より $\dfrac{b-2}{a-3}\times(-1)=-1$

$\therefore$ 整理して

$a-b=1 \cdots (i)$

そして PQ の中点が ℓ 上より

$\dfrac{b+2}{2}=-\dfrac{a+3}{2}-1$

整理して

$a+b=-7 \cdots (ii)$

(i)(ii)より

$a=-3,\ b=-4$

よって $Q(-3, -4)$

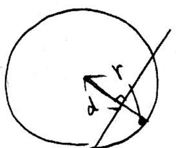
9. 円 $x^2+2x+y^2=1$ ……① と直線 $y=mx-m$ ……② が異なる2点で交わるような，定数 m の値の範囲を求めよ。

① $\Longleftrightarrow x^2+2x+y^2=1$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2-1+y^2=1$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2+y^2=2$

中心 $(-1, 0)$ 半径 $\sqrt{2}$



異なる2点で交わる

$\Updownarrow$

$d<r$

(d: 中心と直線との距離)

ゆえに ② $\Longleftrightarrow mx-y-m=0$

より $d=\dfrac{|m(-1)-0-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$

$\therefore\ d=\dfrac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}$

よって $\dfrac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}$

両辺 $\dfrac{4m^2}{m^2+1}<2$

$4m^2<2m^2+2$

整理して

$m^2-1<0$

$(m+1)(m-1)<0$

$\therefore\ -1<m<1$

10. 点 (3, 1) を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

接点を (x_1, y_1) とすると

接線の方程式は

$x_1x+y_1y=2$

とおける。この直線が

点 (3, 1) を通るので

$3x_1+y_1=2 \cdots (i)$

また 接点は円 $x^2+y^2=2$

上の点より

$x_1^2+y_1^2=2 \cdots (ii)$

(i)(ii)より $y_1=-3x_1+2$

を(ii)に代入して

$x_1^2+(-3x_1+2)^2=2$

整理して

$5x_1^2-6x_1+1=0$

$(5x_1-1)(x_1-1)=0$

$\therefore\ x_1=\dfrac{1}{5}, 1$

・$x_1=\dfrac{1}{5}$ の時

(i)より

$y_1=-3\cdot\dfrac{1}{5}+2$

$=\dfrac{7}{5}$

この時 接線は

$\dfrac{1}{5}x+\dfrac{7}{5}y=2$

$\therefore\ x+7y=10$

・$x_1=1$ の時

(i)より

$y_1=-3\cdot1+2$

$=-1$

この時 接線は

$1\cdot x+(-1)y=2$

$\therefore\ x-y=2$

以上より

$x+7y=10,\ \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

$x-y=2,\ (1, -1)$

11. 2円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の2つの交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ。また，2円の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

2円 $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases}$

の交点を通る円は

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$

$(k\neq-1)$

とおける。この円が原点を通るので

$-4+k\cdot1=0 \quad \therefore\ k=4$

代入して

$x^2+y^2-4+4(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$

$\therefore\ 5x^2+5y^2-16x-8y=0$

また 2円の2つの交点を通る直線は

$x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0$

において $k=-1$ とすればよく

$x^2+y^2-4x-2y+1-(x^2+y^2-4)=0$

$\therefore\ 4x+2y-5=0$