数学演習（２つの円）Ｒ１．６．１５　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．2 点 A(2, 3)，B(6, 1) から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。また，距離の比が 1 : 3 である点 Q の軌跡を求めよ。

2．2 点 A(6, 0)，B(3, 3) と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q を 3 つの頂点とする三角形の重心 P の軌跡を求めよ。

3．円 $x^2+y^2+3ax-2a^2y+a^4+2a^2-1=0$ がある。$a$ の値が変化するとき，円の中心の軌跡を求めよ。

4．次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 $\ell : x-y+1=0$ に関して直線 $2x+y-2=0$ と対称な直線

5．放物線 $y=x^2+(2t-10)x-4t+16$ の頂点を P とする。$t$ が 0 以上の値をとって変化するとき，頂点 P の軌跡を求めよ。

6．$m$ が実数全体を動くとき，次の 2 直線の交点 P はどんな図形を描くか。

$$mx-y=0 \ \cdots\cdots ①, \qquad x+my-m-2=0 \ \cdots\cdots ②$$

7．放物線 $C: y=x^2$ と直線 $\ell: y=m(x-1)$ は異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1)　定数 $m$ の値の範囲を求めよ。

(2)　$m$ の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

# 数学演習（２つの円）Ｒ１．６．１５

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．2 点 A$(2,\ 3)$，B$(6,\ 1)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。また，距離の比が $1:3$ である点 Q の軌跡を求めよ。

解答　順に 直線 $2x-y-6=0$；中心が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{13}{4}\right)$，半径が $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ の円

解説

P$(x,\ y)$ とする。

AP＝BP から　　$AP^2=BP^2$

ゆえに　　$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-6)^2+(y-1)^2$

整理して　　$2x-y-6=0$　…… ①

よって，点 P は直線 ① 上にある。

逆に，直線 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　　直線 $2x-y-6=0$

次に，Q$(x,\ y)$ とする。

AQ：BQ＝1：3 から　　$9AQ^2=BQ^2$

ゆえに　　$9\{(x-2)^2+(y-3)^2\}=(x-6)^2+(y-1)^2$

$8x^2-24x+8y^2-52y+80=0$

よって　　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{4}\right)^2=\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{4}\right)^2$　…… ②

ゆえに，点 Q は円 ② 上にある。

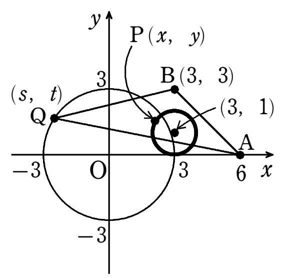
逆に，円 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 Q の軌跡は　　中心が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{13}{4}\right)$，半径が $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ の円

2．2 点 A$(6,\ 0)$，B$(3,\ 3)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q を 3 つの頂点とする三角形の重心 P の軌跡を求めよ。

解答　中心が点 $(3,\ 1)$，半径が 1 の円

解説




P$(x,\ y)$，Q$(s,\ t)$ とする。

点 Q は円 $x^2+y^2=9$ 上を動くから

$s^2+t^2=9$　…… ①

点 P は △ABQ の重心であるから

$x=\dfrac{6+3+s}{3}$，$y=\dfrac{0+3+t}{3}$　…… ②

② から　　$s=3x-9$，$t=3y-3$

① に代入して　　$(3x-9)^2+(3y-3)^2=9$

したがって　　$(x-3)^2+(y-1)^2=1$　…… ③

ゆえに，点 P は円 ③ 上にある。

逆に，円 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

よって，求める軌跡は　　中心が点 $(3,\ 1)$，半径が 1 の円

3．円 $x^2+y^2+3ax-2a^2y+a^4+2a^2-1=0$ がある。$a$ の値が変化するとき，円の中心の軌跡を求めよ。

解答　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

解説

方程式を変形して　　$\left(x+\dfrac{3}{2}a\right)^2+(y-a^2)^2=\dfrac{1}{4}a^2+1$

$\dfrac{1}{4}a^2+1>0$ であるから，$a$ がすべての実数値をとって変化するとき，与えられた方程式は円を表す。

円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると　　$x=-\dfrac{3}{2}a$，$y=a^2$

$a=-\dfrac{2}{3}x$ であるから，$y=a^2$ に代入して　　$y=\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2=\dfrac{4}{9}x^2$

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

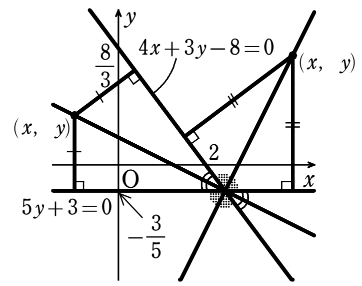
4．次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 $\ell$：$x-y+1=0$ に関して直線 $2x+y-2=0$ と対称な直線

解答　(1)　$4x-2y-11=0$，$4x+8y-5=0$　　(2)　$x+2y-3=0$

解説




(1)　求める二等分線上の点 P$(x,\ y)$ は，2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ から等距離にある。

ゆえに　　$\dfrac{|4x+3y-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|0\cdot x+5y+3|}{\sqrt{0^2+5^2}}$

よって　　$4x+3y-8=\pm(5y+3)$

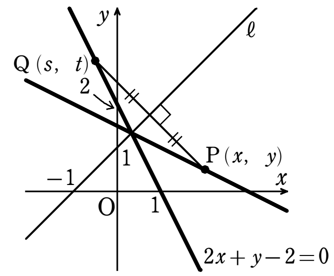
したがって，求める二等分線の方程式は

$4x+3y-8=5y+3$ から

$4x-2y-11=0$

$4x+3y-8=-5y-3$ から

$4x+8y-5=0$




(2)　直線 $2x+y-2=0$ 上の動点を Q$(s,\ t)$ とし，直線 $\ell$ に関して点 Q と対称な点を P$(x,\ y)$ とする。

直線 PQ は $\ell$ に垂直であるから　$\dfrac{t-y}{s-x}\cdot 1=-1$

よって　　$s+t=x+y$　…… ①

線分 PQ の中点は直線 $\ell$ 上にあるから

$\dfrac{x+s}{2}-\dfrac{y+t}{2}+1=0$

よって　　$s-t=-x+y-2$　…… ②

①，② から　　$s=y-1$，$t=x+1$

点 Q は直線 $2x+y-2=0$ 上を動くから　　$2s+t-2=0$

これに $s=y-1$，$t=x+1$ を代入して，求める直線の方程式は

$2(y-1)+(x+1)-2=0$　すなわち　$x+2y-3=0$

5. 放物線 $y=x^2+(2t-10)x-4t+16$ の頂点を P とする。$t$ が 0 以上の値をとって変化するとき，頂点 P の軌跡を求めよ。

解答　放物線 $y=-(x-2)^2$ の $x\leqq 5$ の部分

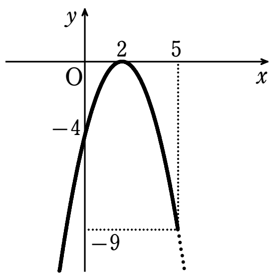
解説

$$y=x^2+(2t-10)x-4t+16=\{x+(t-5)\}^2-(t-5)^2-4t+16$$
$$=\{x+(t-5)\}^2-t^2+6t-9=\{x+(t-5)\}^2-(t-3)^2$$

よって，放物線の頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=-t+5$　…… ①

$y=-(t-3)^2$　…… ②




① から　$t=5-x$

② に代入して　$y=-\{(5-x)-3\}^2$

$=-(x-2)^2$

また，$t\geqq 0$ であるから　$5-x\geqq 0$

したがって　$x\leqq 5$

よって，求める軌跡は，放物線 $y=-(x-2)^2$ の $x\leqq 5$ の部分。

6. $m$ が実数全体を動くとき，次の 2 直線の交点 P はどんな図形を描くか。

$mx-y=0$ …… ①，　$x+my-m-2=0$ …… ②

解答　円 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 (0，1) を除く

解説

P$(x,\ y)$ とすると，$x$，$y$ は ①，② を同時に満たす。

[1]　$x\neq 0$ のとき

① から　$m=\dfrac{y}{x}$　② に代入して　$x+\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{y}{x}-2=0$

分母を払って　$x^2+y^2-2x-y=0$　…… ③

すなわち　$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

③ において，$x=0$ とすると　$y=0,\ 1$

ゆえに，$x\neq 0$ のとき，点 P は円 ③ から 2 点 (0，0)，(0，1) を除いた図形上にある。

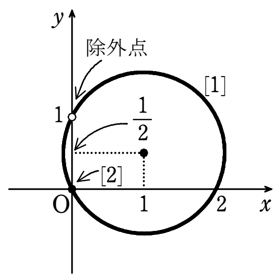
[2]　$x=0$ のとき　① から　$y=0$

$x=0$，$y=0$ を ② に代入すると　$m=-2$

よって，点 (0，0) は $m=-2$ のときの 2 直線の交点である。

以上から，求める図形は

円 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 (0，1) を除く。




7. 放物線 $C:y=x^2$ と直線 $\ell:y=m(x-1)$ は異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1)　定数 $m$ の値の範囲を求めよ。

(2)　$m$ の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

解答　(1)　$m<0,\ 4<m$　(2)　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

解説

(1)　$y=x^2$ と $y=m(x-1)$ から　$x^2=m(x-1)$

整理すると　$x^2-mx+m=0$　…… ①

$C$ と $\ell$ は異なる 2 点で交わっているから，① の判別式 $D$ について　$D>0$

$D=(-m)^2-4m=m(m-4)$ であるから　$m(m-4)>0$

よって　$m<0,\ 4<m$

(2)　2 点 A，B の $x$ 座標は，2 次方程式 ① の異なる 2 つの実数解 $\alpha$，$\beta$ である。

線分 AB の中点を P$(x,\ y)$ とすると，解と係数の関係から

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2}\quad\cdots\cdots ②$$

また，P は直線 $\ell$ 上の点であるから

$$y=m(x-1)=m\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{1}{2}m^2-m\quad\cdots\cdots ③$$

② から　$m=2x$　…… ②′

③ に代入して整理すると　$y=2x^2-2x$

また，(1) の結果と ②′ から　$2x<0,\ 4<2x$

したがって　$x<0,\ 2<x$

求める軌跡は　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分