数学演習（軌跡と領域）Ｈ２２．５．１４

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　2点A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 6)$から等距離にある点P

(2)　2点A$(-3,\ 0)$，B$(3,\ 0)$に対して，$AP^2+BP^2=20$である点P

(3)　2点A$(2,\ 0)$，B$(-2,\ 0)$に対して，$AP^2-BP^2=10$である点P

2．2点O$(0,\ 0)$，A$(6,\ 0)$からの距離の比が$2:1$である点Pの軌跡を求めよ。

3．次のような点Pの軌跡を求めよ。

(1)　点A$(-5,\ 2)$と直線$y=2x+4$上の点Qを結ぶ線分AQの中点P

(2)　点A$(0,\ -3)$と放物線$y=x^2-4$上の点Qを結ぶ線分AQの中点P

(3)　点A$(-3,\ 0)$と円$x^2+y^2=6y$上の点Qを結ぶ線分AQを$2:1$に内分する点P

4．放物線$y=x^2-2(m+1)x+3m^2-m$の頂点の座標をmで表せ。また，mがすべての実数値をとって変化するとき，頂点はどんな曲線上を動くか。

5．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>x+1$　(2)　$y\leqq -2x+3$　(3)　$2x+3y-6\geqq 0$

(4)　$3x-4y+12>0$　(5)　$y<2$　(6)　$x\geqq -3$

6．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2<4$　(2)　$x^2+y^2\geqq 25$　(3)　$x^2+(y-4)^2\leqq 16$

(4)　$x^2+y^2\geqq 4x-2y-1$　(5)　$x^2+y^2+6x-4y+12<0$

7．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-3y>6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ x+y<3 \end{cases}$

(3) $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$

(4) $-3<x+3y<3$

8．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $xy<0$

(2) $(x-y)(x+2y) \geqq 0$

(3) $(x+y-3)(2x-y+6)<0$

(4) $(x+y-3)(x^2+y^2-9)<0$

9．x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+2y \leqq 12$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，次の式の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

(1) $x+y$

(2) $2x+5y$

数学演習（軌跡と領域）Ｈ２２．５．１４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 6)$ から等距離にある点Ｐ

(2)　2 点 A$(-3,\ 0)$，B$(3,\ 0)$ に対して，$AP^2+BP^2=20$ である点Ｐ

(3)　2 点 A$(2,\ 0)$，B$(-2,\ 0)$ に対して，$AP^2-BP^2=10$ である点Ｐ

解答　(1)　直線 $2x-4y+9=0$　　(2)　円 $x^2+y^2=1$　　(3)　直線 $x=-\dfrac{5}{4}$

解説

点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$AP=BP$ であるから　　$AP^2=BP^2$

すなわち　　$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$

整理すると　　$2x-4y+9=0$

よって，点Ｐは直線 $2x-4y+9=0$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $2x-4y+9=0$

(2)　$AP^2+BP^2=20$ から　　$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

整理すると　　$x^2+y^2=1$

よって，点Ｐは円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $x^2+y^2=1$

(3)　$AP^2-BP^2=10$ から　　$(x-2)^2+y^2-\{(x+2)^2+y^2\}=10$

整理すると　　$-8x=10$　　すなわち　　$x=-\dfrac{5}{4}$

よって，点Ｐは直線 $x=-\dfrac{5}{4}$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $x=-\dfrac{5}{4}$

2．2 点 O$(0,\ 0)$，A$(6,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 Pの軌跡を求めよ。

解答　円 $(x-8)^2+y^2=16$

解説

点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

$OP:AP=2:1$ から　　$OP=2AP$

すなわち　　$OP^2=4AP^2$

ゆえに　　$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$

整理して　　$x^2+y^2-16x+48=0$

変形して　　$(x-8)^2+y^2=16$　……①

よって，点Ｐは円 ① 上にある 。

逆に，この円 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $(x-8)^2+y^2=16$

3．次のような点Ｐの軌跡を求めよ。

(1)　点 A$(-5,\ 2)$ と直線 $y=2x+4$ 上の点Ｑを結ぶ線分 AQ の中点Ｐ

(2)　点 A$(0,\ -3)$ と放物線 $y=x^2-4$ 上の点Ｑを結ぶ線分 AQ の中点Ｐ

(3)　点 A$(-3,\ 0)$ と円 $x^2+y^2=6y$ 上の点Ｑを結ぶ線分 AQ を $2:1$ に内分する点Ｐ

解答　(1)　直線 $y=2x+8$　　(2)　放物線 $y=2x^2-\dfrac{7}{2}$　　(3)　円 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

解説

点Ｑの座標を $(s,\ t)$ とし，点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　Ｑは直線 $y=2x+4$ 上にあるから　　$t=2s+4$　……①

また，Ｐは線分 AQ の中点であるから　　$x=\dfrac{s-5}{2}$，$y=\dfrac{t+2}{2}$

すなわち　　$s=2x+5$，$t=2y-2$

これを ① に代入して　　$2y-2=2(2x+5)+4$

整理すると　　$y=2x+8$

よって，点Ｐは直線 $y=2x+8$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $y=2x+8$

(2)　Ｑは放物線 $y=x^2-4$ 上にあるから　　$t=s^2-4$　……①

また，Ｐは線分 AQ の中点であるから　　$x=\dfrac{s}{2}$，$y=\dfrac{t-3}{2}$

すなわち　　$s=2x$，$t=2y+3$

これを ① に代入して　　$2y+3=(2x)^2-4$

整理すると　　$y=2x^2-\dfrac{7}{2}$

よって，点Ｐは放物線 $y=2x^2-\dfrac{7}{2}$ 上にある。

逆に，この放物線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=2x^2-\dfrac{7}{2}$

(3)　Ｑは円 $x^2+y^2=6y$ 上にあるから　　$s^2+t^2=6t$　……①

また，Ｐは線分 AQ を $2:1$ に内分する点であるから

$$x=\frac{2s-3}{3},\quad y=\frac{2t}{3}$$

すなわち　　$s=\dfrac{3x+3}{2}$，$t=\dfrac{3y}{2}$

これを ① に代入して　　$\left(\dfrac{3x+3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3y}{2}\right)^2=6\cdot\dfrac{3y}{2}$

整理すると　　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

よって，点Ｐは，円 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

4．放物線 $y=x^2-2(m+1)x+3m^2-m$ の頂点の座標を m で表せ。また，m がすべての実数値をとって変化するとき，頂点はどんな曲線上を動くか。

解答　頂点 $(m+1,\ 2m^2-3m-1)$，放物線 $y=2x^2-7x+4$

解説

$y=\{x^2-2(m+1)x+(m+1)^2\}-(m+1)^2+3m^2-m$

$\quad=\{x-(m+1)\}^2+2m^2-3m-1$

よって，頂点の座標は　　$(m+1,\ 2m^2-3m-1)$

$x=m+1$，$y=2m^2-3m-1$ として，この 2 式から m を消去すると

$m=x-1$ より　　$y=2(x-1)^2-3(x-1)-1$

整理して　　$y=2x^2-7x+4$

したがって，放物線 $y=2x^2-7x+4$ 上を動く。

5．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>x+1$　　(2)　$y\leqq -2x+3$　　(3)　$2x+3y-6\geqq 0$

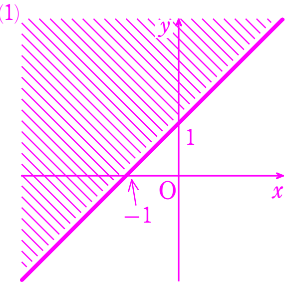
(4)　$3x-4y+12>0$　　(5)　$y<2$　　(6)　$x\geqq -3$

解答　(1)　[図]，境界線を含まない　　(2)　[図]，境界線を含む

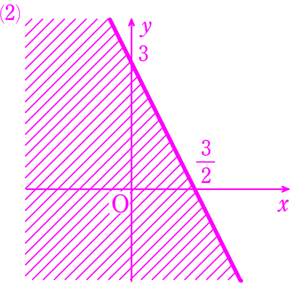
(3)　[図]，境界線を含む　　(4)　[図]，境界線を含まない

(5)　[図]，境界線を含まない　　(6)　[図]，境界線を含む

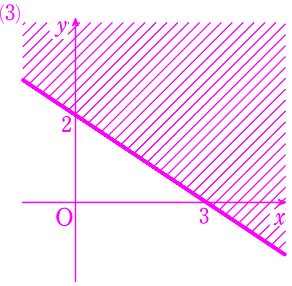
(1)



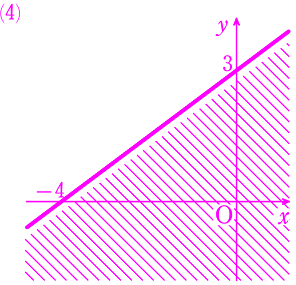
(2)



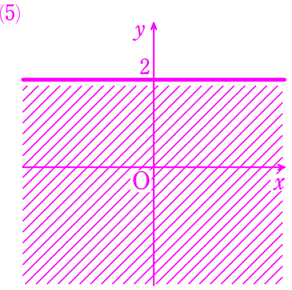
(3)



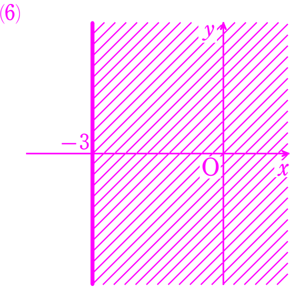
(4)



(5)



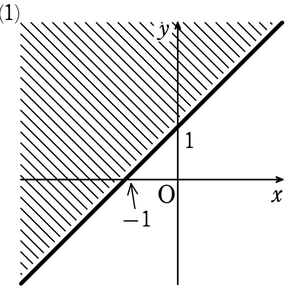
(6)

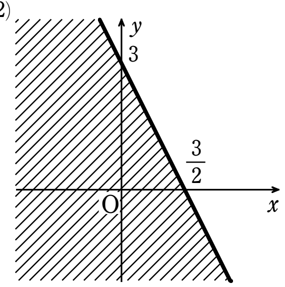


解説

(1)　求める領域は，直線 $y=x+1$ の上側で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(2)　求める領域は，直線 $y=-2x+3$ およびその下側で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(1)


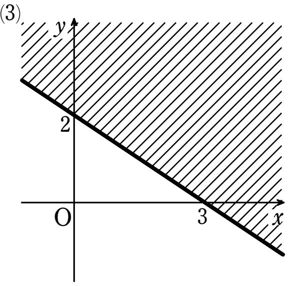
(2)


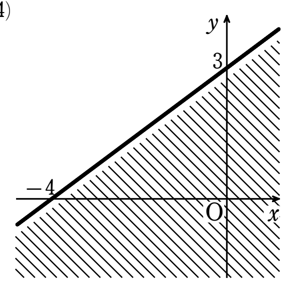
(3)　$2x+3y-6\geqq 0$ から　　$y\geqq -\frac{2}{3}x+2$

よって，求める領域は，直線 $y=-\frac{2}{3}x+2$ およびその上側で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(4)　$3x-4y+12>0$ から　　$y<\frac{3}{4}x+3$

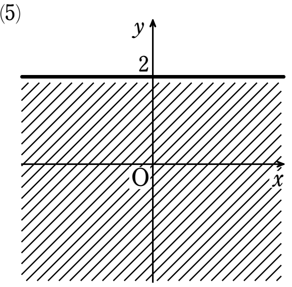
よって，求める領域は，直線 $y=\frac{3}{4}x+3$ の下側で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

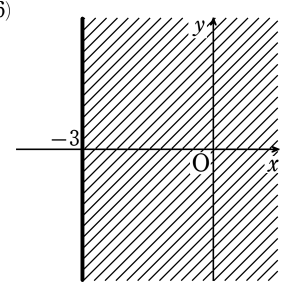
(3)


(4)


(5)　求める領域は，直線 $y=2$ の下側で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(6)　求める領域は，直線 $x=-3$ およびその右側で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(5)


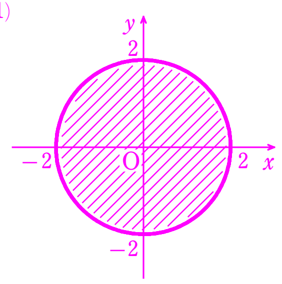
(6)


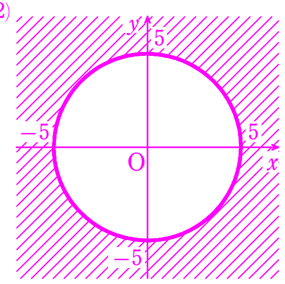
6．次の不等式の表す領域を図示せよ。

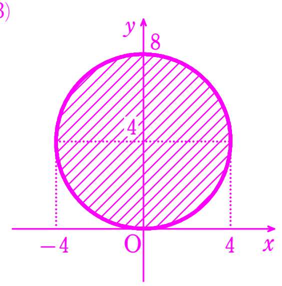
(1)　$x^2+y^2<4$　　(2)　$x^2+y^2\geqq 25$　　(3)　$x^2+(y-4)^2\leqq 16$

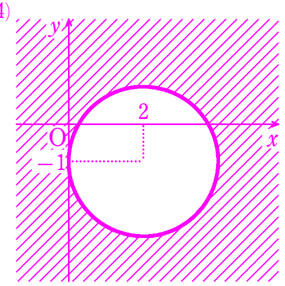
(4)　$x^2+y^2\geqq 4x-2y-1$　　(5)　$x^2+y^2+6x-4y+12<0$

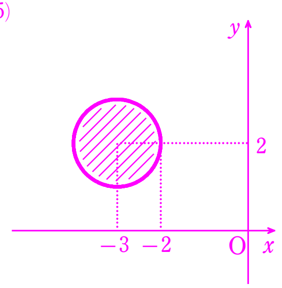
解答　(1)　[図]，境界線を含まない　　(2)　[図]，境界線を含む
(3)　[図]，境界線を含む　　(4)　[図]，境界線を含む
(5)　[図]，境界線を含まない

(1)


(2)


(3)


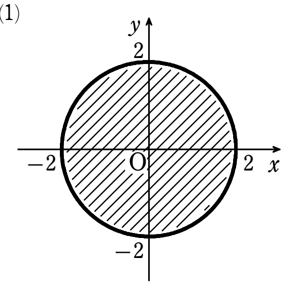
(4)


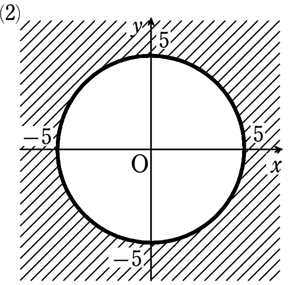
(5)


解説

(1)　求める領域は，円 $x^2+y^2=4$ の内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(2)　求める領域は，円 $x^2+y^2=25$ およびその外部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

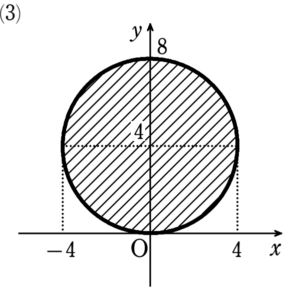
(1)


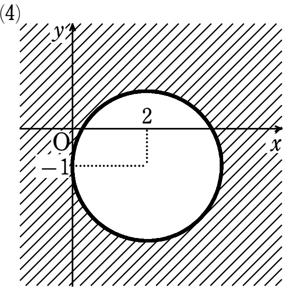
(2)


(3)　求める領域は，円 $x^2+(y-4)^2=16$ およびその内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(4)　$x^2+y^2\geqq 4x-2y-1$ から　　$(x-2)^2+(y+1)^2\geqq 4$

よって，求める領域は，円 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ およびその外部で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

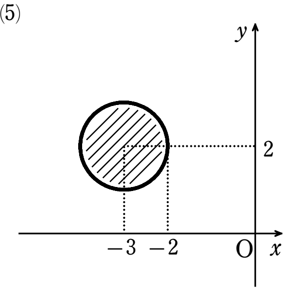
(3)


(4)


(5)　$x^2+y^2+6x-4y+12<0$ から

$(x+3)^2+(y-2)^2<1$

よって，求める領域は，円 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ の内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

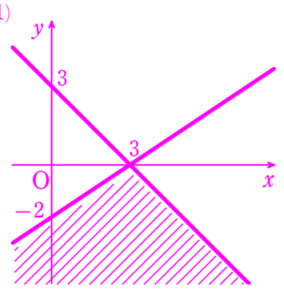
(5)


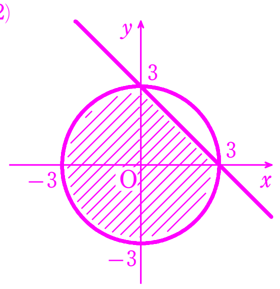
7．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

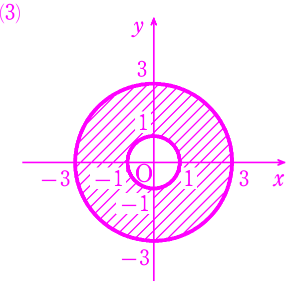
(1) $\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-3y>6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ x+y<3 \end{cases}$

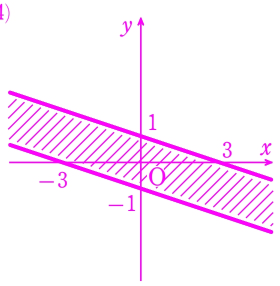
(3) $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$　　(4) $-3<x+3y<3$

解答　(1) [図]，境界線を含まない　(2) [図]，境界線を含まない
(3) [図]，境界線を含む　(4) [図]，境界線を含まない

(1)


(2)


(3)


(4)


解説

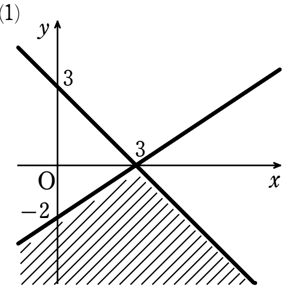
(1) $x+y<3$ から　　$y<-x+3$

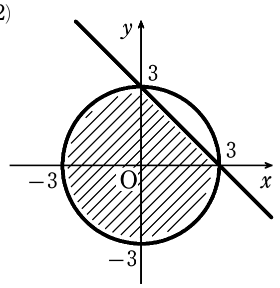
$2x-3y>6$ から　　$y<\frac{2}{3}x-2$

よって，求める領域は，直線 $y=-x+3$ の下側と直線 $y=\frac{2}{3}x-2$ の下側の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(2) $x+y<3$ から　　$y<-x+3$

よって，求める領域は，円 $x^2+y^2=9$ の内部と直線 $y=-x+3$ の下側の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(1)


(2)


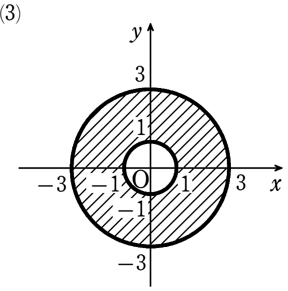
(3) 不等式から　　$x^2+y^2 \geqq 1$　かつ　$x^2+y^2 \leqq 9$

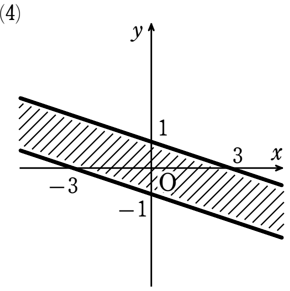
よって，求める領域は，円 $x^2+y^2=1$ およびその外部と，円 $x^2+y^2=9$ およびその内部の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(4) 不等式から　　$x+3y>-3$　かつ　$x+3y<3$

すなわち　　$y>-\frac{1}{3}x-1$　かつ　$y<-\frac{1}{3}x+1$

よって，求める領域は，直線 $y=-\frac{1}{3}x-1$ の上側と直線 $y=-\frac{1}{3}x+1$ の下側の共通部分で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(3)


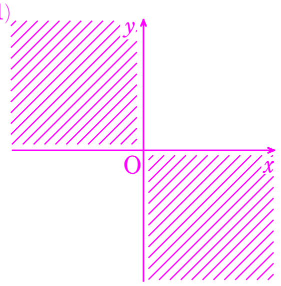
(4)


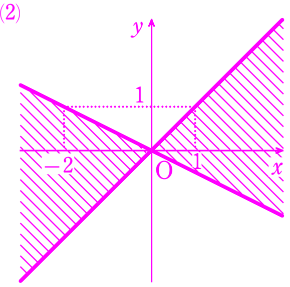
8．次の不等式の表す領域を図示せよ。

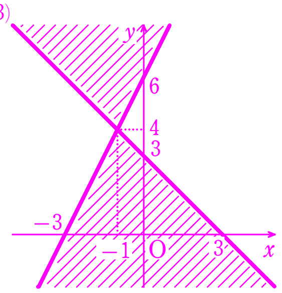
(1) $xy<0$　　(2) $(x-y)(x+2y) \geqq 0$

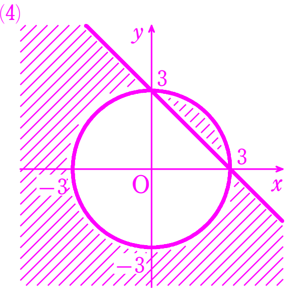
(3) $(x+y-3)(2x-y+6)<0$　　(4) $(x+y-3)(x^2+y^2-9)<0$

解答　(1) [図]，境界線を含まない　(2) [図]，境界線を含む
(3) [図]，境界線を含まない　(4) [図]，境界線を含まない

(1)


(2)


(3)


(4)


解説

(1) 与えられた不等式は　$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$

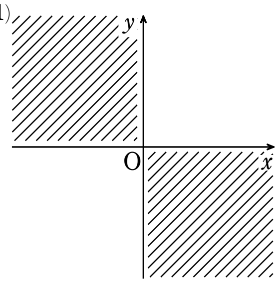
よって，求める領域は [図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

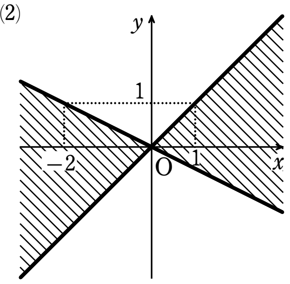
(2) 与えられた不等式は

$\begin{cases} x-y \geqq 0 \\ x+2y \geqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x-y \leqq 0 \\ x+2y \leqq 0 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} y \leqq x \\ y \geqq -\frac{1}{2}x \end{cases}$　または　$\begin{cases} y \geqq x \\ y \leqq -\frac{1}{2}x \end{cases}$

よって，求める領域は [図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

(1)


(2)


(3) 与えられた不等式は

$\begin{cases} x+y-3>0 \\ 2x-y+6<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+y-3<0 \\ 2x-y+6>0 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} y>-x+3 \\ y>2x+6 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y<-x+3 \\ y<2x+6 \end{cases}$

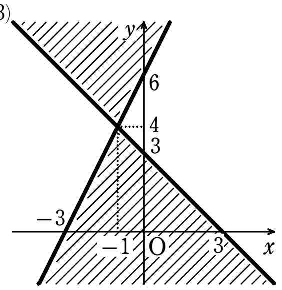
よって，求める領域は [図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

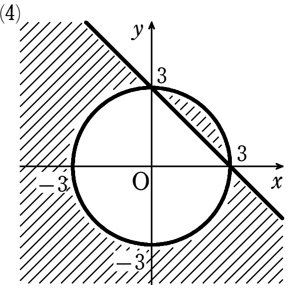
(4) 与えられた不等式は

$\begin{cases} x+y-3>0 \\ x^2+y^2-9<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+y-3<0 \\ x^2+y^2-9>0 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} y>-x+3 \\ x^2+y^2<9 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y<-x+3 \\ x^2+y^2>9 \end{cases}$

よって，求める領域は [図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。

(3)


(4)


9．x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+2y \leqq 12$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，次の式の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　　　(2)　$2x+5y$

解答　(1)　$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

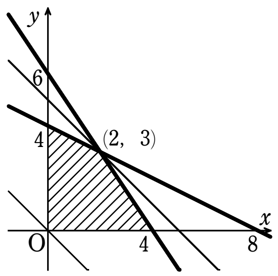
(2)　$x=0$，$y=4$ のとき最大値 20；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

解説

連立方程式 $3x+2y=12$，$x+2y=8$ を解くと

$$x=2,\quad y=3$$

であるから，与えられた連立不等式の表す領域は，4 点 (0，0)，(4，0)，(0，4)，(2，3) を頂点とする四角形の内部および周である。



(1)　$x+y=k$　…… ① とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

図から，直線 ① が点 (2，3) を通るとき，k の値は最大となる。

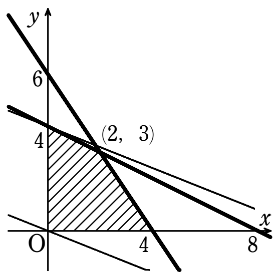
このとき　$k=2+3=5$

また，直線 ① が点 (0，0) を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=0$

よって，$x=2$，$y=3$ のとき最大値 5；

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0



(2)　$2x+5y=k$　…… ② とおくと，これは傾き $-\dfrac{2}{5}$，y 切片 $\dfrac{k}{5}$ の直線を表す。

図から，直線 ② が点 (0，4) を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=2\cdot 0+5\cdot 4=20$

また，直線 ② が点 (0，0) を通るとき，k の値は最小となる。このとき　$k=0$

よって，$x=0$，$y=4$ のとき最大値 20；

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0