1. ２点 $A(0,1)$, $B(3,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

2. $AB=6$ である２定点 A, B に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

3. ２点 $A(0,0)$, $B(6,0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=x^2-2(a-1)x+2a$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

5. 点Qが円$x^2+y^2=9$上を動くとき，点Qと点$A(6,0)$を結ぶ線分AQを２：１に内分する点Pの軌跡を求めよ。

6. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ x-y+1\geqq 0 \end{cases}$

7. 不等式 $(x-y-2)(3x+y+6)\geqq 0$ の表す領域を図示せよ。

8. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる2点 A, B で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

9. x, yが不等式$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+3y\leqq 15$, $2x+y\leqq 10$ を満たしているとき， 以下の問いに答えよ。

(1) $x+y$の最大値･最小値とそのときのx, yの値を求めよ。

(2) $x^2+y^2-8x-8y$ の最大値･最小値とそのときのx, yの値を求めよ。

1. 2点 $A(0,1)$, $B(3,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

点$P(x, y)$とおく

$AP = BP$

$\Longleftrightarrow AP^2 = BP^2$

$\Longleftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y-4)^2$

整理して　$x+y-4=0$

よって求める軌跡は

直線　$x+y-4=0$

5

2. $AB=6$ である2定点 A, B に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

$A(-3,0)$, $B(3,0)$　$P(x, y)$とおく

$AP^2+BP^2=26$

$\Longleftrightarrow \{(x+3)^2+(y-0)^2\}+\{(x-3)^2+(y-0)^2\} = 26$

整理して　$x^2+y^2=4$　△5

これは原点中心，半径2の円を表す。

以上より，求める軌跡は

ABの中点を中心とし，半径2の円

10

3. 2点 $A(0,0)$, $B(6,0)$ からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡を求めよ。

$P(x, y)$とおく

$AP : BP = 2:1$

$\Longleftrightarrow AP = 2BP$

$\Longleftrightarrow AP^2 = 4BP^2$

$\Longleftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2 = 4\{(x-6)^2+(y-0)^2\}$

整理して

$x^2+y^2-16x+48=0$　△5

$(x-8)^2+y^2=16$

ゆえに，求める軌跡は

中心$(8,0)$，半径4の円

10

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=x^2-2(a-1)x+2a$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

$y = x^2-2(a-1)x+2a$

$= \{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a$

よって，点$P(x, y)$とおくと

$$\begin{cases} x = a-1 \\ y = -(a-1)^2+2a \end{cases}$$

とおける。$x=a-1$ より $a=x+1$ を代入して

$y = -x^2+2(x+1)$

∴求める軌跡は

放物線　$y=-x^2+2x+2$

10

5. 点Qが円 $x^2+y^2=\cancel{16}\ 9$ 上を動くとき，点Qと点$A(6,0)$を結ぶ線分AQを２：１に内分する点Pの軌跡を求めよ。

点$Q(s, t)$，$P(x, y)$とおくと

Qは円 $x^2+y^2=16$ より　$s^2+t^2=9$ …(i)

が成り立つ。また点PはAQを 2:1 に内分するので

$x = \dfrac{1\cdot 6+2\cdot s}{2+1}$，　$y = \dfrac{1\cdot 0+2\cdot t}{2+1}$

つまり　$x = \frac{1}{3}(6+2s)$，$y = \frac{2}{3}t$

これを s, t について解くと　$s = \frac{3}{2}(x-2)$，$t = \frac{3}{2}y$

(i)に代入して

$\left\{\frac{3}{2}(x-2)\right\}^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 9$

△5　$\frac{9}{4}(x-2)^2+\frac{9}{4}y^2 = 9$

$\therefore (x-2)^2+y^2=4$

以上より求める軌跡

中心$(2,0)$ 半径2の円

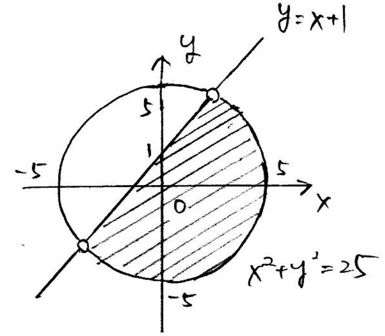
10

6. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ x-y+1 \geqq 0 \end{cases}$

$x-y+1 \geqq 0$

$-y \geqq -x-1$

$\therefore y \leqq x+1$



よって，求める領域は

右図の斜線部

ただし，境界線は

直線上の点は含み

円上の点と，円と直線の交点は含まない。

なければ △5

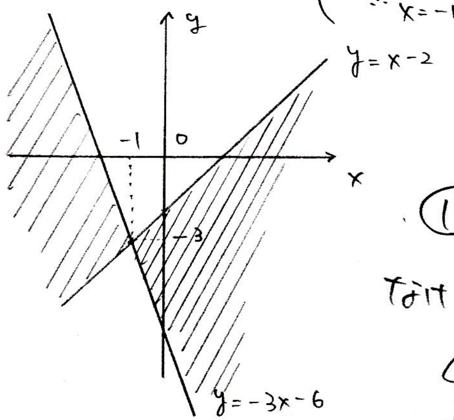
10

7. 不等式 $(x-y-2)(3x+y+6) \geqq 0$ の表す領域を図示せよ。

$\begin{cases} x-y-2 \geqq 0 \\ 3x+y+6 \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x-y-2 \leqq 0 \\ 3x+y+6 \leqq 0 \end{cases}$

∴ $\begin{cases} y \leqq x-2 \\ y \geqq -3x-6 \end{cases}$ または $\begin{cases} y \geqq x-2 \\ y \leqq -3x-6 \end{cases}$

よって、求める領域は下図. (交点 $x-2=-3x-6$ ∴ $x=-1$)



(10)

なければ (5)

ただし境界線上の点を含む//

8. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる2点 A, B で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

異なる2点で交わる

⟺ $x^2=m(x-1)$ が異なる2つの実数解をもつ

∴ $D=(-m)^2-4\cdot1\cdot m>0$　($m \leqq 0$, $m \geqq 4$ は 3)

$m(m-4)>0$

∴ $m<0$, $m>4$ (5)

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

$A(\alpha, m(\alpha-1))$, $B(\beta, m(\beta-1))$, $P(x, y)$ とおく

この時、点Pは線分ABの中点より

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\dfrac{m(\alpha-1)+m(\beta-1)}{2}$ …(*)

また、α と β は2次方程式 $x^2-mx+m=0$ の2つの解より、解と係数の関係から

$x=\dfrac{m}{2}$, $y=\dfrac{m(\alpha+\beta-2)}{2}=\dfrac{m(m-2)}{2}$ …(*)'

ここで(1)より $m<0$, $m>4$ から $x<0$, $x>2$

そして(*)'より m を消去して

$y=2x^2-2x$ (5)

∴ 求める軌跡は

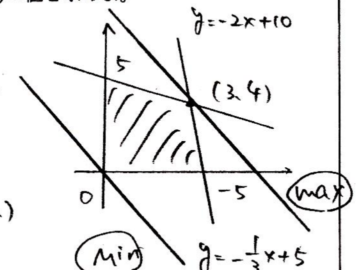
放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$, $x>2$ の部分//

(10)

9. x, y が不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+3y \leqq 15$, $2x+y \leqq 10$ を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x+y$ の最大値・最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

$\begin{cases} x \geqq 0,\ y \geqq 0 \\ x+3y \leqq 15 \\ 2x+y \leqq 10 \end{cases}$ を図示すると右図 (境界含む)



$x+y=k$ とおくと、この式は

$y=-x+k$、つまり傾き -1、y切片 k の直線を表す

この直線は領域内しか通過できないので、

図より

点 $(3,4)$ を通る時 k は最大値 $k=3+4=7$ をとる

点 $(0,0)$ を通る時 k は最小値 $k=0+0=0$ をとる

∴ 最大値 7 $(x=3, y=4)$

最小値 0 $(x=0, y=0)$ //

(10)

(2) $x^2+y^2-8x-8y$ の最大値・最小値を求めよ。 とその時の x, y の値

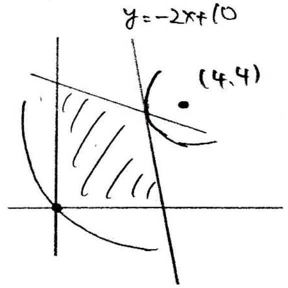
$x^2+y^2-8x-8y=k$ とおくと

$(x-4)^2+(y-4)^2=k+32$

∴ 中心 $(4,4)$ 半径 $\sqrt{k+32}$ の円を表す

よって、この円が領域内を通過する時

半径が最大となる時と最小になる時を求める.



図より、半径が最大となるのは $(0,0)$ を通る時とわかるが、最小となるのは

$\begin{cases} \cdot\ y=-2x+10 \text{ に接する} \\ \cdot\ \text{点}(3,4)\text{を通る} \end{cases}$

のどちらか不明である。

• 点 $(3,4)$ を通る時、$k=3^2+4^2-8\cdot3-8\cdot4=-31$

• $y=-2x+10$ に接する時.

接点は「中心 $(4,4)$ を通り $y=-2x+10$ に垂直な直線」と「$y=-2x+10$」の交点である.

∴ $\begin{cases} y-4=\frac{1}{2}(x-4) \\ y=-2x+10 \end{cases}$

これを解いて $\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{18}{5}\right)$ であり、この点は領域内の点である。(x座標が3より大きいので

また、この時、円の半径は、中心 $(4,4)$ と $y=-2x+10$ の距離に等しいので

$\sqrt{k+32}=\dfrac{|2\cdot4+4-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(10)

2乗して $k+32=\dfrac{4}{5}$ ∴ $k=-\dfrac{156}{5}$

これは $k=-31$ $\left(-\dfrac{155}{5}\right)$ よりも小さい

以上より

最大値 0 $(x=0, y=0)$ 最小値 $-\dfrac{156}{5}$ $\left(x=\dfrac{16}{5}, y=\dfrac{18}{5}\right)$