数学演習（軌跡）H２４．２．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　y 軸からの距離が3である点P

(2)　2点O(0，0)，A(4，0)に対して ∠OPA が直角となる点P

2．t がすべての実数値をとって変化するとき，次の式で表される点 $(x,\ y)$ はどんな図形上にあるか。

(1) $\begin{cases} x=t \\ y=2t+3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-4t+1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$

3．次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　2点A(3，0)，B(0，6)から等距離にある点P

(2)　2点A(−3，0)，B(3，0)に対して，$AP^2+BP^2=20$ である点P

(3)　2点A(2，0)，B(−2，0)に対して，$AP^2-BP^2=10$ である点P

4．次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　3点O(0，0)，A(1，3)，B(3，2)に対して，$AP^2+BP^2+9=OP^2$ を満たす点P

(2)　2点O(0，0)，A(6，0)からの距離の比が2：1である点P

5．放物線 $y=x^2-2(m+1)x+3m^2-m$ の頂点の座標を m で表せ。また，m がすべての実数値をとって変化するとき，頂点はどんな曲線上を動くか。

６. 次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1)　点 A $(-5,\ 2)$ と直線 $y=2x+4$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P

(2)　点 A $(0,\ -3)$ と放物線 $y=x^2-4$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P

(3)　点 A $(-3,\ 0)$ と円 $x^2+y^2=6y$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ を 2 : 1 に内分する点 P

７. 2 点 A $(5,\ 0)$，B $(7,\ -6)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上の点 Q を頂点とする △ABQ の重心 P の軌跡を求めよ。

８. a がすべての実数値をとって変化するとき，円 $x^2+y^2+2(a+2)x-6ay=0$ の中心の軌跡を求めよ。

９. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>x+1$　　(2)　$y\leqq -2x+3$　　(3)　$2x+3y-6\geqq 0$

(4)　$3x-4y+12>0$　　(5)　$y<2$　　(6)　$x\geqq -3$

1．次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　y 軸からの距離が 3 である点 P

(2)　2 点 O (0, 0), A (4, 0) に対して ∠OPA が直角となる点 P

解答　(1)　直線 $x=\pm 3$　　(2)　円 $(x-2)^2+y^2=4$　ただし，点 (0, 0), (4, 0) を除く。

解説

点 P の座標を (x, y) とする。

(1)　P についての条件は　$x=\pm 3$

よって，点 P は直線 $x=\pm 3$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $x=\pm 3$

(2)　点 P は線分 OA を直径とする円上にある。

ただし，点OやAがPと一致すると△PABが定義できない。

ゆえに点Pは点 O(0, 0), A(4, 0) を除く。

この円の中心は　(2, 0),　　半径は　2

よって，求める軌跡は　　円 $(x-2)^2+y^2=4$

ただし，点 (0, 0), (4, 0) を除く。

2．t がすべての実数値をとって変化するとき，次の式で表される点 (x, y) はどんな図形上にあるか。

(1)　$\begin{cases} x=t \\ y=2t+3 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-4t+1 \end{cases}$　　(3)　$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$

解答　(1)　直線 $y=2x+3$　　(2)　直線 $y=-2x-5$　　(3)　放物線 $y=2x^2+4x+3$

解説

(1)　t を消去する。$t=x$を$y=2t+3$に代入して　　$y=2x+3$

よって，点 (x, y) は直線 $y=2x+3$ 上にある。

(2)　$x=2t-3$ から　　$2t=x+3$

これを $y=-2\cdot 2t+1$ に代入して

$y=-2(x+3)+1$　すなわち　$y=-2x-5$

よって，点 (x, y) は直線 $y=-2x-5$ 上にある。

(3)　$x=t-1$ から　　$t=x+1$

これを $y=2t^2+1$ に代入して

$y=2(x+1)^2+1$　すなわち　$y=2x^2+4x+3$

よって，点 (x, y) は放物線 $y=2x^2+4x+3$ 上にある。

3．次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A (3, 0), B (0, 6) から等距離にある点 P

(2)　2 点 A (−3, 0), B (3, 0) に対して，$AP^2+BP^2=20$ である点 P

(3)　2 点 A (2, 0), B (−2, 0) に対して，$AP^2-BP^2=10$ である点 P

解答　(1)　直線 $2x-4y+9=0$　　(2)　円 $x^2+y^2=1$　　(3)　直線 $x=-\dfrac{5}{4}$

解説

点 P の座標を (x, y) とする。

(1)　AP＝BP であるから両辺二乗して　　$AP^2=BP^2$

すなわち　　$AP=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$　より　$AP^2=(x-3)^2+(y-0)^2$　となる

$BP=\sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2}$　より　$BP^2=(x-0)^2+(y-6)^2$　となる

$AP^2=BP^2$　に代入して　$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$

両辺展開して整理すると　　$2x-4y+9=0$

よって，点 P は直線 $2x-4y+9=0$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $2x-4y+9=0$

(2)　$AP^2+BP^2=20$ から　　$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

整理すると　　$x^2+y^2=1$　この式は原点中心，半径1の円を表す

よって，点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $x^2+y^2=1$

(3)　$AP^2-BP^2=10$ から　　$(x-2)^2+y^2-\{(x+2)^2+y^2\}=10$

整理すると　　$-8x=10$　　すなわち　　$x=-\dfrac{5}{4}$

よって，点 P は直線 $x=-\dfrac{5}{4}$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $x=-\dfrac{5}{4}$

4．次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　3 点 O (0, 0), A (1, 3), B (3, 2) に対して，$AP^2+BP^2+9=OP^2$ を満たす点 P

(2)　2 点 O (0, 0), A (6, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P

解答　(1)　円 $(x-4)^2+(y-5)^2=9$　　(2)　円 $(x-8)^2+y^2=16$

解説

点 P の座標を (x, y) とする。

(1)　条件から　$AP^2+BP^2+9=OP^2$　より

$(x-1)^2+(y-3)^2+(x-3)^2+(y-2)^2+9=x^2+y^2$

整理すると　　$x^2+y^2-8x-10y+32=0$

すなわち　　$(x-4)^2+(y-5)^2=9$　…… ①

よって，点 P は中心(4, 5), 半径3の円 ①上 にある 。

逆に，この円 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $(x-4)^2+(y-5)^2=9$

(2)　OP : AP＝2 : 1 から　　OP＝2AP

すなわち両辺二乗して　　$OP^2=4AP^2$

ゆえに　　$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$

整理して　　$x^2+y^2-16x+48=0$

変形して　　$(x-8)^2+y^2=16$　…… ①

よって，点 P は中心(8, 0), 半径4である円 ① 上にある 。

逆に，この円 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $(x-8)^2+y^2=16$

5．放物線 $y=x^2-2(m+1)x+3m^2-m$ の頂点の座標を m で表せ。また，m がすべての実数値をとって変化するとき，頂点はどんな曲線上を動くか。

解答　頂点 $(m+1,\ 2m^2-3m-1)$，放物線 $y=2x^2-7x+4$

解説

$y=\{x^2-2(m+1)x+(m+1)^2\}-(m+1)^2+3m^2-m$

$=\{x-(m+1)\}^2+2m^2-3m-1$

よって，頂点の座標は　　$(m+1,\ 2m^2-3m-1)$

また，頂点を(x, y)とおくとき，$(x, y)=(m+1,\ 2m^2-3m-1)$　なので

$x=m+1$，$y=2m^2-3m-1$ として，この 2 式から m を消去する。

$m=x-1$ より　　$y=2(x-1)^2-3(x-1)-1$

整理して　　$y=2x^2-7x+4$

したがって，放物線 $y=2x^2-7x+4$ 上を動く。

6．次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1)　点 A (−5, 2) と直線 $y=2x+4$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P

(2)　点 A (0, −3) と放物線 $y=x^2-4$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P

(3)　点 A (−3, 0) と円 $x^2+y^2=6y$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ を 2 : 1 に内分する点 P

解答　(1)　直線 $y=2x+8$　　(2)　放物線 $y=2x^2-\dfrac{7}{2}$　　(3)　円 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

解説

点 Q の座標を (s, t) とし，点 P の座標を (x, y) とする。

(1)　Q は直線 $y=2x+4$ 上にあるから　　$t=2s+4$　…… ①

また，$P(x, y)$ は線分 AQ の中点であるから$A(-5, 2)$，$Q(s, t)$より

$(x, y)=\left(\dfrac{-5+s}{2}, \dfrac{2+t}{2}\right)$　より　$x=\dfrac{s-5}{2}$，$y=\dfrac{t+2}{2}$

すなわち　　$s=2x+5$，$t=2y-2$

これを ① に代入して　　$2y-2=2(2x+5)+4$

整理すると　　$y=2x+8$

よって，点 P は直線 $y=2x+8$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $y=2x+8$

(2)　Q は放物線 $y=x^2-4$ 上にあるから　　$t=s^2-4$　…… ①

また，P は線分 AQ の中点であるから　　$x=\dfrac{0+s}{2}$，$y=\dfrac{t-3}{2}$

すなわち　　$s=2x$，$t=2y+3$

これを ① に代入して　　$2y+3=(2x)^2-4$　より　$2y=4x^2-7$

整理すると　　$y=2x^2-\dfrac{7}{2}$

よって，点 P は放物線 $y=2x^2-\dfrac{7}{2}$ 上にある。

逆に，この放物線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=2x^2-\dfrac{7}{2}$

(3)　Q は円 $x^2+y^2=6y$ 上にあるから　　$s^2+t^2=6t$　…… ①

また，P は線分 AQ を 2 : 1 に内分する点であるから

$x=\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot s}{2+1}$，　$y=\dfrac{1\cdot 0+2\cdot t}{2+1}$

よって　　$x=\dfrac{2s-3}{3}$，$y=\dfrac{2t}{3}$

変形して　$3x=2s-3$　，$3y=2t$

つまり　$2s=3x+3$　，　$2t=3y$

すなわち　$s=\dfrac{3x+3}{2}$，$t=\dfrac{3y}{2}$

これを ① に代入して　$\left(\dfrac{3x+3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3y}{2}\right)^2=6\cdot\dfrac{3y}{2}$

展開して整理すると　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

よって，点 P は，円 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 上にある。

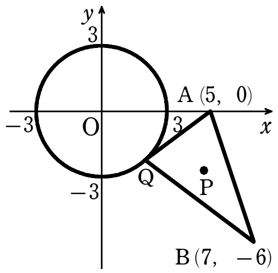
逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　円 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

7．2 点 A(5，0)，B(7，-6) と円 $x^2+y^2=9$ 上の点 Q を頂点とする △ABQ の重心 P の軌跡を求めよ。

解答　円 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

解説



点 Q の座標を $(s,\ t)$ とし，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

点 Q は直線 AB 上にないから，常に △ABQ は存在する。

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$s^2+t^2=9$　…… ①

また，P は △ABQ の重心であるから

$x=\dfrac{5+7+s}{3}$，$y=\dfrac{0-6+t}{3}$

すなわち　$s=3x-12$，$t=3y+6$

これを ① に代入して　$(3x-12)^2+(3y+6)^2=9$

ゆえに　$\{3(x-4)\}^2+\{3(y-2)\}^2=9$

$9(x-4)^2+9(y-2)^2=9$　両辺を9で割って

$(x-4)^2+(y+2)^2=1$　…… ②

よって，点 P は中心$(4,2)$，半径1の円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　円 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

8．a がすべての実数値をとって変化するとき，円 $x^2+y^2+2(a+2)x-6ay=0$ の中心の軌跡を求めよ。

解答　直線 $y=-3x-6$

解説

円の方程式を変形すると　$(x+a+2)^2+(y-3a)^2=10a^2+4a+4\ (>0)$

ゆえに，円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると　$x=-a-2$，$y=3a$

a を消去して　$y=3(-x-2)$　すなわち　$y=-3x-6$

よって，求める軌跡は　直線 $y=-3x-6$

9．次の不等式の表す領域を図示せよ。

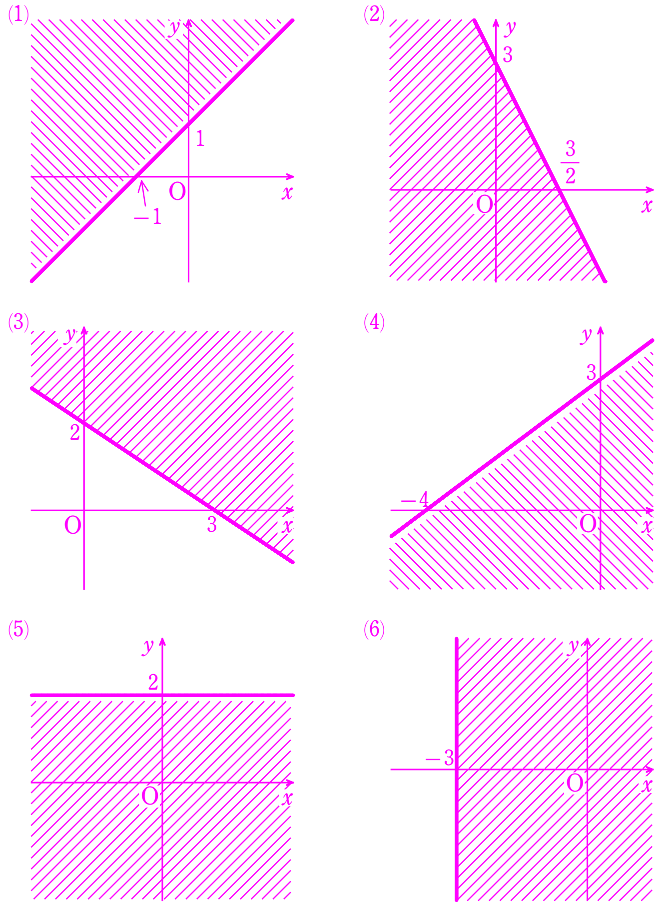
(1)　$y>x+1$　(2)　$y\leqq -2x+3$　(3)　$2x+3y-6\geqq 0$

(4)　$3x-4y+12>0$　(5)　$y<2$　(6)　$x\geqq -3$

解答　(1)　[図]，境界線を含まない　(2)　[図]，境界線を含む

(3)　[図]，境界線を含む　(4)　[図]，境界線を含まない

(5)　[図]，境界線を含まない　(6)　[図]，境界線を含む



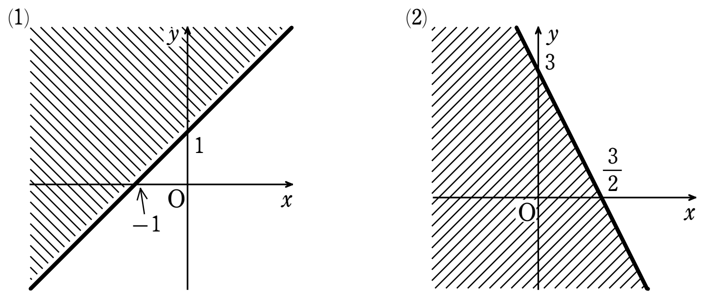
解説

(1)　求める領域は，直線 $y=x+1$ の上側で，[図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(2)　求める領域は，直線 $y=-2x+3$ およびその下側で，[図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(3)　$2x+3y-6\geqq 0$ から　$y\geqq -\dfrac{2}{3}x+2$

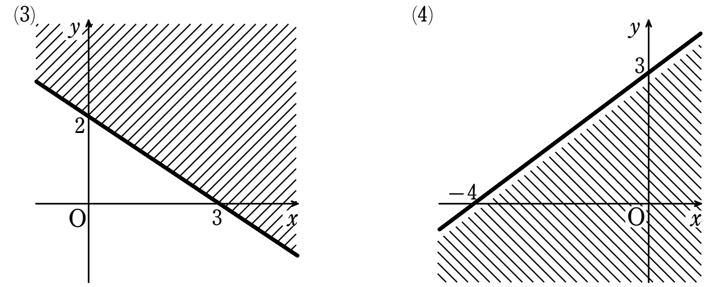
よって，求める領域は，直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ およびその上側で，[図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

(4)　$3x-4y+12>0$ から　$y<\dfrac{3}{4}x+3$

よって，求める領域は，直線 $y=\dfrac{3}{4}x+3$ の下側で，[図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。



(5)　求める領域は，直線 $y=2$ の下側で，[図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(6)　求める領域は，直線 $x=-3$ およびその右側で，[図] の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。