数学演習（軌跡と領域）Ｈ２１．１０．１５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．2点A$(-3,\ 1)$，B$(3,\ -2)$から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

２．2点A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$からの距離の比が$2:1$である点Pの軌跡を求めよ。

３．2点A$(5,\ 0)$，B$(7,\ -6)$と円$x^2+y^2=9$上の点Qを頂点とする△ABQの重心Pの軌跡を求めよ。

４．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$2x+3y-12<0$　　　(2)　$x\leqq 1$

５．次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$(x-1)^2+(y+2)^2\geqq 9$　　　(2)　$x^2+y^2+2x-2y+1<0$

６．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} x+2y<6 \\ 2x+y>6 \end{cases}$　　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 4 \\ x+y<2 \end{cases}$

7. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x^2+y^2-4)(y-x+1)<0$$

8. x, y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+2y \leqq 6$, $3x+2y \leqq 10$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値・最小値を求めよ。

9. 連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$, $x+y \geqq 0$ で表される領域を D とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$4x+3y$ の最大値と最小値を求めよ。

１．2 点 A$(-3,\ 1)$，B$(3,\ -2)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

解答　直線 $4x-2y-1=0$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P の満たす条件は　$AP=BP$　すなわち　$AP^2=BP^2$

よって　$(x+3)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+2)^2$

展開すると　$x^2+y^2+6x-2y+10=x^2+y^2-6x+4y+13$

整理すると　$4x-2y-1=0$

ゆえに，点 P は直線 $4x-2y-1=0$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点 P は，与えられた条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　直線 $4x-2y-1=0$

２．2 点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

解答　中心 $(4,\ 0)$，半径 4 の円

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P の満たす条件は　$AP:BP=2:1$

ゆえに　$AP=2BP$　すなわち　$AP^2=4BP^2$

したがって　$(x+4)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

整理すると　$x^2-8x+y^2=0$

すなわち　$(x-4)^2+y^2=4^2$

ゆえに，点 P は円 $(x-4)^2+y^2=4^2$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点 P は，与えられた条件を満たす。

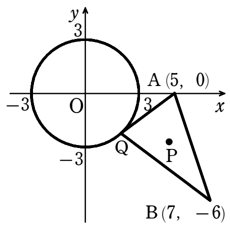
よって，点 P の軌跡は，　中心 $(4,\ 0)$，半径 4 の円

３．2 点 A$(5,\ 0)$，B$(7,\ -6)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上の点 Q を頂点とする △ABQ の重心 P の軌跡を求めよ。

解答　円 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

点 Q の座標を $(s,\ t)$ とし，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

点 Q は直線 AB 上にないから，常に △ABQ は存在する。



Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$s^2+t^2=9$　…… ①

また，P は △ABQ の重心であるから

$x=\dfrac{5+7+s}{3}$，$y=\dfrac{0-6+t}{3}$

すなわち　$s=3x-12$，$t=3y+6$

これを ① に代入して　$(3x-12)^2+(3y+6)^2=9$

$\{3(x-4)\}^2+\{3(y+2)\}^2=9$

$9(x-4)^2+9(y+2)^2=9$

ゆえに　$(x-4)^2+(y+2)^2=1$　…… ②

よって，点 P は円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

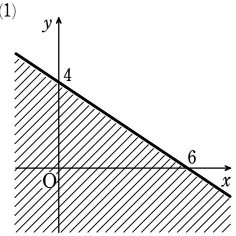
したがって，求める軌跡は　円 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

４．次の不等式の表す領域を図示せよ。

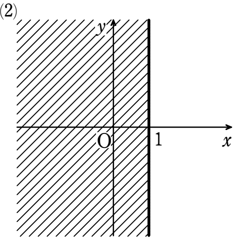
(1)　$2x+3y-12<0$　　　　(2)　$x\leqq 1$

解答　(1)［図］境界線を含まない　　(2)［図］境界線を含む

(1)



(2)



(3)　不等式を変形すると　$y<-\dfrac{2}{3}x+4$

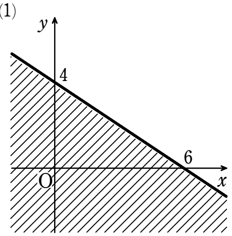
よって，求める領域は，直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+4$ より下側で，［図］の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

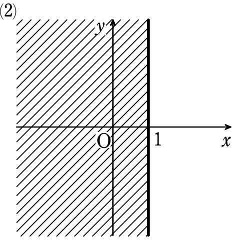
(4)　この領域は，x 座標が 1 以下の点 $(x,\ y)$ の全体であるから，求める領域は，直線 $x=1$ より左側および直線上の点で，［図］の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

(1)



(2)

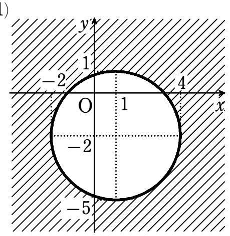


５．次の不等式の表す領域を図示せよ。

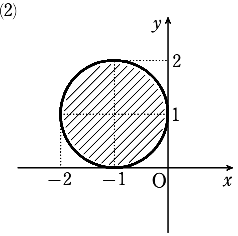
(1)　$(x-1)^2+(y+2)^2\geqq 9$　　　　(2)　$x^2+y^2+2x-2y+1<0$

解答　(1)［図］境界線を含む　　(2)［図］境界線を含まない

(1)



(2)

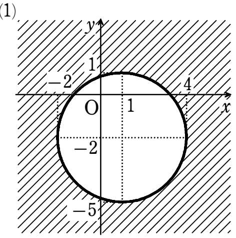


(1)　求める領域は，円 $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ の外部および円上の点で，［図］の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

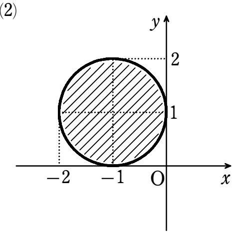
(2)　不等式を変形すると　$(x+1)^2+(y-1)^2<1$

よって，求める領域は，円 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ の内部で，［図］の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

(1)



(2)



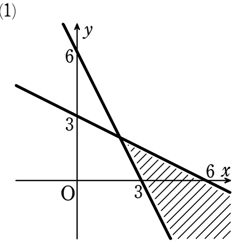
６．次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} x+2y<6 \\ 2x+y>6 \end{cases}$　　　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 4 \\ x+y<2 \end{cases}$

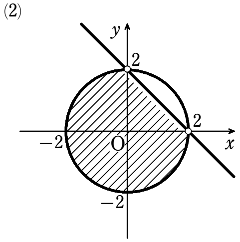
解答　(1)［図］境界線を含まない

(2)［図］直線 $x+y=2$ 上の点は含まない，他は含む

(1)



(2)



(1)　$x+2y<6$ から　$y<-\dfrac{1}{2}x+3$

$2x+y>6$ から　$y>-2x+6$

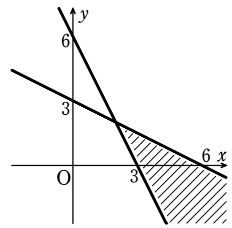
求める領域は，

直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$　の下側

直線 $y=-2x+6$　の上側

の共通部分で，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2)　$x+y<2$ から　$y<-x+2$

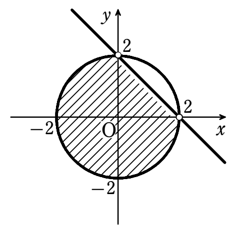
求める領域は，

円 $x^2+y^2=4$　の内部と周

直線 $y=-x+2$　の下側

の共通部分で，右の図の斜線部分。

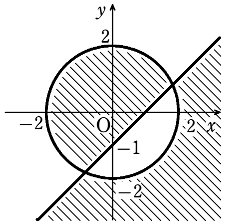
ただし，境界線は，直線および，直線と円周の交点を含まない。



7. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x^2+y^2-4)(y-x+1)<0$$

解答 ［図］ 境界線を含まない

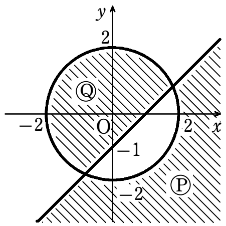


与えられた不等式は，次のように表される。

$\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ y-x+1<0 \end{cases}$ ……Ⓟ または

$\begin{cases} x^2+y^2-4<0 \\ y-x+1>0 \end{cases}$ ……Ⓠ

求める領域は，Ⓟ の表す領域とⓆ の表す領域の和集合で，右の図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。



8. x，y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y\leqq 6$，$3x+2y\leqq 10$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値・最小値を求めよ。

解答 $x=2$，$y=2$ のとき最大値 4；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

与えられた連立不等式の表す領域 D は，

4 点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{10}{3},\ 0\right)$，$(0,\ 3)$，$(2,\ 2)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$x+y=k$ ……①

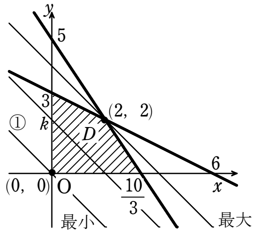
とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

k のとりうる値の範囲は，直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲である。

図から，直線 ① が点 $(2,\ 2)$ を通るとき k の値は最大になり，点 $(0,\ 0)$ を通るとき k の値は最小になる。

よって，$x+y$ は $x=2$，$y=2$ のとき最大値 4

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。



9. 連立不等式 $x^2+y^2\leqq 2$，$x+y\geqq 0$ で表される領域を D とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$4x+3y$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 最大値 $5\sqrt{2}$，最小値 -1

連立方程式 $x^2+y^2=2$，$x+y=0$ を解くと，y を消去して $x^2+(-x)^2=2$

ゆえに $x^2=1$ よって $x=\pm 1$

したがって，解は $(x,\ y)=(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$

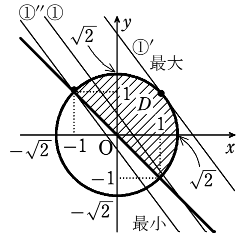
領域 D は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$4x+3y=k$ ……① とおくと，これは

傾き $-\dfrac{4}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す。

k のとりうる値の範囲は，直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲である。

図から，k の値が最大となるのは，直線 ① が円 $x^2+y^2=2$ と第 1 象限で接するときである。



このとき，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|4\cdot 0+3\cdot 0-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{|k|}{5}=\sqrt{2}$$

ゆえに $|k|=5\sqrt{2}$ よって $k=\pm 5\sqrt{2}$

第 1 象限では $x>0$ かつ $y>0$ であるから $k=4x+3y>0$

したがって $k=5\sqrt{2}$

また，直線 ① の傾きが $-\dfrac{4}{3}$，直線 $x+y=0$ の傾きが -1 で，$-\dfrac{4}{3}<-1$ であるから，

図より，直線①の切片の値が最小となるのは，直線 ① が点 $(-1,\ 1)$ を通るときである。

このとき，k の値は $4(-1)+3\cdot 1=-1$

以上から 最大値 $5\sqrt{2}$，最小値 -1