統一テスト（軌跡と領域）Ｈ２０．３．１２　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1. ２点 $A(0\,,1)\,,B(3\,,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

2. $AB=6$ である２定点 $A\,,B$ に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

3. ２点 $A(0\,,0)\,,B(6\,,0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=-2x^2+(a-1)x+a+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

5. ２点 $A(5\,,-3)\,,B(1\,,6)$ と円 $x^2+y^2=9$ の周上の動点を Q とするとき，$\triangle ABQ$ の重心 P の軌跡を求めよ。

6. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる２点 $A\,,B$ で交わっているとき，次の問いに答えよ。

⑴　定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

⑵　m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

7. 不等式 $(x^2+y^2-1)(x+y)>0$ の表す領域を図示せよ。

8. $x\,,y$ が不等式 $x\geqq 0\,,\ y\geqq 0\,,\ x+3y\leqq 15\,,\ 2x+y\leqq 10$ を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

⑴ $x+y$ の最大値・最小値とそのときの $x\,,y$ の値を求めよ。

⑵　$x^2+y^2-8x-8y$ の最大値・最小値とそのときの $x\,,y$ の値を求めよ。

統一テスト（軌跡と領域）H20．3．12

（　　）組（　　）番　名前（ こたえ ）

1．2点$A(0,1)$，$B(3,4)$から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

P(x,y)とおくと。条件より AP=BP なので

$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$(x-0)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-4)^2$

整理して。$x+y-4=0$

∴ 直線 $x+y-4=0$

(10)

2．$AB=6$である2定点A，Bに対して，条件$AP^2+BP^2=26$を満たす点Pの軌跡を求めよ。

A(−3,0)，B(3,0)として考える。P(x,y)とおくと

$AP^2+BP^2=26$

$\Leftrightarrow \{(x+3)^2+(y-0)^2\}+\{(x-3)^2+(y-0)^2\}=26$

整理して。$x^2+y^2=4$　(5)

(10)

点Pの軌跡は 線分ABの中点を中心とする半径2の円

3．2点$A(0,0)$，$B(6,0)$からの距離の比が2：1である点Pの軌跡を求めよ。

P(x,y)とおくと $AP:BP=2:1$

$\Leftrightarrow AP=2BP$

$\Leftrightarrow AP^2=4BP^2$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=4\{(x-6)^2+(y-0)^2\}$

(10)

整理して。$x^2+y^2-16x+48=0$。

$(x-8)^2+y^2=16$

点Pの軌跡は 中心(8,0)半径4の円

4．aが実数全体を変化するとき，放物線$y=-2x^2+(a-1)x+a+1$の頂点Pの軌跡を求めよ。

P(x,y)とおく

$y=-2\{x^2-\frac{a-1}{2}x\}+a+1$

$=-2(x-\frac{a-1}{4})^2+2(\frac{a-1}{4})^2+a+1$ より

$x=\frac{a-1}{4}$，$y=2(\frac{a-1}{4})^2+a+1$

$a=4x+1$として，aを消去すると

$y=2x^2+4x+2$

∴ 点Pの軌跡は 放物線 $y=2x^2+4x+2$

(10)

5．2点$A(5,-3)$，$B(1,6)$と円$x^2+y^2=9$の周上の動点をQとするとき，$\triangle ABQ$の重心Pの軌跡を求めよ。

P(x,y)，Q(s,t)とおく。

(10)

△ABQの重心は $\left(\frac{5+1+s}{3}, \frac{-3+6+t}{3}\right)$ とおける。

この点がP(x,y)であるので $x=\frac{6+s}{3}$，$y=\frac{3+t}{3}$ …①

また 点Q(s,t)は円$x^2+y^2=9$上にあるので $s^2+t^2=9$ …②

よって①より $s=3x-6$，$t=3y-3$として，②に代入して，整理すると

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$．∴点Pの軌跡は中心(2,1)半径1の円

6．放物線$y=x^2$と直線$y=m(x-1)$が異なる2点A，Bで交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数mの取りうる値の範囲を求めよ。　(5)

2次方程式 $x^2=m(x-1)$ が異なる2つの実数解を持てばいい

$x^2-mx+m=0$

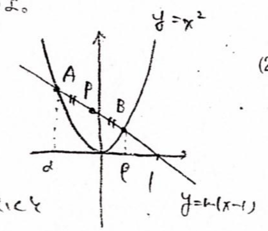
$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot m>0$

$m^2-4m>0$

∴ ($m\leqq0$，$m\geqq4$は −2)

$m<0$，$m>4$

(2)　mの値が変化するとき，線分ABの中点の軌跡を求めよ。



A，Bのx座標をα，βとする。

すると $A(\alpha, m(\alpha-1))$，$B(\beta, m(\beta-1))$ とおける

よって，ABの中点は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, m(\frac{\alpha+\beta}{2}-1)\right)$

とおける。ABの中点をP(x,y)とおくと

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$y=m(\frac{\alpha+\beta}{2}-1)$ …①

と書ける。ここで，α，βは2次方程式

$x^2-mx+m=0$

の2つの解より 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m$

ゆえに①より

$x=\frac{m}{2}$，$y=m(\frac{m}{2}-1)$ …②

②よりmを消去すると $y=2x(x-1)=2x^2-2x$　(10)

また (1)より $m<0$，$m>4$ より $x=\frac{m}{2}$ なので $x<0$，$x>2$

よって点Pの軌跡は 放物線 $y=2x^2-2x$ ($x<0$，$x>2$の部分)　(15)

7．不等式$(x^2+y^2-1)(x+y)>0$の表す領域を図示せよ。　(10)

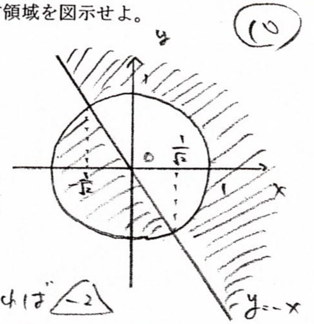
$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x+y>0 \end{cases}$

または

$\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x+y<0 \end{cases}$

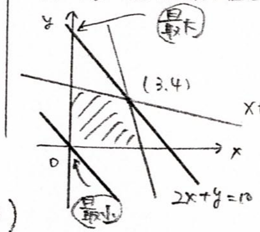
右図の斜線部 ただし境界は含まず

↑ なければ −2



8．x，yが不等式$x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+3y\leqq15$，$2x+y\leqq10$を満たしているとき，以下の問いに答えよ。　(10)

(1) $x+y$の最大値・最小値とそのときのx，yの値を求めよ。



$x+y=k$とおくと

$y=-x+k$.

これは傾き−1，y切片kの直線を表す

不等式の表す領域と共有点を持ちつつ，直線が動くときの y切片の最大・最小を求めると

(3,4)通るとき最大，(0,0)通るとき最小．

∴ 最大値7 ($x=3$，$y=4$)

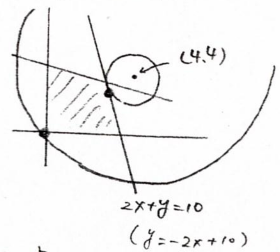
最小値0 ($x=0$，$y=0$)

(2)　$x^2+y^2-8x-8y$の最大値・最小値とそのときのx，yの値を求めよ。

$x^2+y^2-8x-8y=k$とおくと

$(x-4)^2+(y-4)^2=k+32$

∴ 中心(4,4) 半径$\sqrt{k+32}$



よって円が$2x+y=10$に接する時最小

$\sqrt{k+32}=\frac{|2\cdot4+4-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt5}$

∴ $k=-\frac{156}{5}$

この時接点の座標は $\begin{cases} y=-2x+10 \\ y-4=\frac{1}{2}(x-4) \end{cases}$ の交点 つまり $(\frac{16}{5}, \frac{18}{5})$ で，この点は領域内の点である

また 点(0,0)を通る時 最大．

ゆえに

$k=0^2+0^2-8\cdot0-8\cdot0$

$=0$

以上より

最大値0 ($x=0$，$y=0$)

最小値$-\frac{156}{5}$ ($x=\frac{16}{5}$，$y=\frac{18}{5}$)