第２回定期考査　Ｈ１８．７．４　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1. ２点 $A(0,1)$，$B(3,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

2. $AB=6$ である２定点 A，B に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

3. ２点 $A(0,0)$，$B(6,0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=-2x^2+(a-1)x+a+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

5. ２点 $A(5,-3)$，$B(1,6)$ と円 $x^2+y^2=9$ の周上の動点を Q とするとき，$\triangle ABQ$ の重心 P の軌跡を求めよ。

6. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる２点 A，B で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

7. 不等式 $(x^2+y^2-1)(|x|-|y|)>0$ の表す領域を図示せよ。

8. 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 10 \\ 2x-y-5 \geqq 0 \end{cases}$ …(※)の表す領域を D とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　x，y が連立不等式（※）を満たすとき，$-x+2y$ の最大値，最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

(2)　領域 D の面積を求めよ。

第２回定期考査　Ｈ１８．７．４　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1. 2点 $A(0,1)$, $B(3,4)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

$P(x,y)$ とおくと．条件より $AP=BP$ なので．

$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$(x-0)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-4)^2$

整理して．$x+y-4=0$　⑩

∴ 直線 $x+y-4=0$

2. $AB=6$ である２定点 A, B に対して，条件 $AP^2+BP^2=26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

$A(-3,0)$, $B(3,0)$ として考える。$P(x,y)$ とおくと

$AP^2+BP^2=26$

$\Leftrightarrow \{(x+3)^2+(y-0)^2\}+\{(x-3)^2+(y-0)^2\}=26$

整理して．$x^2+y^2=4$　⑤

⑩

点Pの軌跡は

線分ABの中点を中心とする半径２の円

3. 2点 $A(0,0)$, $B(6,0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

$P(x,y)$ とおくと　$AP:BP=2:1$

$\Leftrightarrow AP=2BP$

$\Leftrightarrow AP^2=4BP^2$　⑩

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=4\{(x-6)^2+(y-0)^2\}$

整理して．$x^2+y^2-16x+48=0$．

$(x-8)^2+y^2=16$

点Pの軌跡は　中心 $(8,0)$ 半径４の円

4. a が実数全体を変化するとき，放物線 $y=-2x^2+(a-1)x+a+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

$P(x,y)$ とおく

$y=-2\{x^2-\frac{a-1}{2}x\}+a+1$

$=-2(x-\frac{a-1}{4})^2+2(\frac{a-1}{4})^2+a+1$ より

$x=\frac{a-1}{4}$, $y=2(\frac{a-1}{4})^2+a+1$

$a=4x+1$ として．a を消去すると

$y=2x^2+4x+2$

⑩

∴ 点Pの軌跡は

放物線

$y=2x^2+4x+2$

5. 2点 $A(5,-3)$, $B(1,6)$ と円 $x^2+y^2=9$ の周上の動点を Q とするとき，$\triangle ABQ$ の重心 P の軌跡を求めよ。

$P(x,y)$, $Q(s,t)$ とおく．　⑩

$\triangle ABQ$ の重心は $(\frac{5+1+s}{3}, \frac{-3+6+t}{3})$ とおける．

この点が $P(x,y)$ であるので　$x=\frac{6+s}{3}$, $y=\frac{3+t}{3}$ ……①

また 点 $Q(s,t)$ は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるので $s^2+t^2=9$ ……②

よって ①より $s=3x-6$, $t=3y-3$ として．②に代入して．整理すると

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$．∴ 点Pの軌跡は中心 $(2,1)$ 半径１の円

6. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ が異なる２点 A, B で交わっているとき，次の問いに答えよ。　⑤

(1) 定数 m の取りうる値の範囲を求めよ。

連立方程式 $x^2=m(x-1)$ が異なる２つの実数解を持てばいい

$x^2-mx+m=0$

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot m>0$

$m^2-4m>0$

∴ $(m\leqq0, m\geqq4$ は $-2)$

$m<0$, $m>4$

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

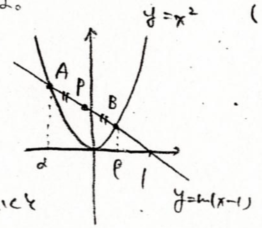
A, Bの x 座標を α, β とする。

すると $A(\alpha, m(\alpha-1))$, $B(\beta, m(\beta-1))$ とおける

よって．ABの中点は $(\frac{\alpha+\beta}{2}, m(\frac{\alpha+\beta}{2}-1))$

とおける。ABの中点 を $P(x,y)$ とおくと

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=m(\frac{\alpha+\beta}{2}-1)$ ……①



と書ける。ここで．α, β は２次方程式

$x^2-mx+m=0$

の２つの解より 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m$

ゆえに ①より

$x=\frac{m}{2}$, $y=m(\frac{m}{2}-1)$ ……②

②より m を消去すると $y=2x(x-1)=2x^2-2x$　⑩

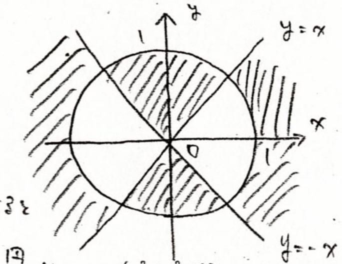
また (1)より $m<0$, $m>4$ より　$x=\frac{m}{2}$ なので　$x<0$, $x>2$

よって点Pの軌跡は 放物線 $y=2x^2-2x$ ($x<0$, $x>2$ の部分)　⑮

7. 不等式 $(x^2+y^2-1)(|x|-|y|)>0$ の表す領域を図示せよ。

求める領域は x 軸にも y 軸にも対称であるので　⑩

$x\geqq0$, $y\geqq0$ で考える．この時．$(x^2+y^2-1)(x-y)>0$



より $\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x-y>0 \end{cases}$

または $\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x-y<0 \end{cases}$

なければ -2

よって．求める領域は

左図（境界を含まず）

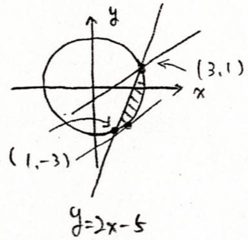
8. 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2\leqq10 \\ 2x-y-5\geqq0 \end{cases}$ …(※)の表す領域を D とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) x, y が連立不等式（※）を満たすとき，$-x+2y$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

$\begin{cases} x^2+y^2\leqq10 \\ y\leqq2x-5 \end{cases}$

円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=2x-5$ の交点は

$(1,-3)$, $(3,1)$



$-x+2y=k$ とおくと

$y=\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$

この直線が Dと共有点を持つような

k の最大・最小は．

最大 …… $(3,1)$ を通る時

最小 …… 円と接する時

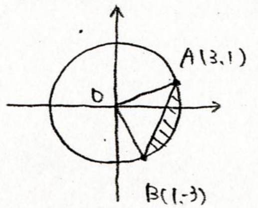
$y=\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ と $x^2+y^2=10$ が接するのは $d=r$

つまり $\sqrt{10}=\frac{|0-2\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$　∴ $k=\pm5\sqrt{2}$　$k<0$ より $k=-5\sqrt{2}$

この時接点は $(\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ である。　⑩

最大値 -1 $(x=3, y=1)$，最小値 $-5\sqrt{2}$ $(x=\sqrt{2}, y=-2\sqrt{2})$

(2) 領域 D の面積を求めよ。



$A(3,1)$, $B(1,-3)$ とおくと

$OA: y=\frac{1}{3}x$, $OB: y=-3x$

よって (OAの傾き)×(OBの傾き)

$=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$

ゆえに　$OA\perp OB$ である。

以上より．面積を S とおくと　$=\frac{5}{2}\pi-5$

$S=(\sqrt{10})^2\pi\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}$　⑩