数学演習（線対称•点と直線の距離）R１．６．１３　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。次のものを求めよ。

(1)　直線 ℓ に関して，点 P$(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標

(2)　直線 ℓ に関して，直線 $m : 3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

2．xy 平面上に 2 点 A$(3,\ 2)$，B$(8,\ 9)$ がある。点 P が直線 $\ell : y=x-3$ 上を動くとき，AP＋PB の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

3．(1)　次の点と直線の距離を求めよ。

（ア）　原点，$4x+3y-12=0$　　（イ）　点 $(2,\ -3)$，$2x-3y+5=0$

（ウ）　点 $(-1,\ 3)$，$x=2$　　（エ）　点 $(5,\ 6)$，$y=3$

(2)　平行な 2 直線 $x-2y+3=0$，$x-2y-1=0$ 間の距離を求めよ。

(3)　点 $(1,\ 1)$ から直線 $ax-2y-1=0$ に下ろした垂線の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

4．3 点 A$(3,\ 5)$，B$(5,\ 2)$，C$(1,\ 1)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　(2)　線分 BC の長さ

(3)　点 A と直線 BC の距離　　(4)　△ABC の面積

5．放物線 $y=x^2$ 上の点 P と，直線 $x-2y-4=0$ 上の点との距離の最小値を求めよ。また，そのときの点 P の座標を求めよ。

6．xy 平面上の点 A$(3,\ 1)$ と，x 軸上の点 B および直線 $y=x$ 上の点 C からなる △ABC 全体からなる集合を S とする。S に属する △ABC で，周囲の長さ AB＋BC＋CA が最小になるのは，B の x 座標が $^{ア}\boxed{}$，C の x 座標が $^{イ}\boxed{}$ のときであり，そのときの周囲の長さは，AB＋BC＋CA＝$^{ウ}\boxed{}$ である。

7．$0<a<\sqrt{3}$ とする。3 直線 ℓ : $y=1-x$，m : $y=\sqrt{3}x+1$，n : $y=ax$ がある。ℓ と m の交点を A，m と n の交点を B，n と ℓ の交点を C とする。

(1)　3 点 A，B，C の座標を求めよ。　　(2)　△ABC の面積 S を a で表せ。

(3)　△ABC の面積 S が最小となる a を求めよ。また，そのときの S を求めよ。

数学演習（線対称•点と直線の距離）Ｒ１．６．１３

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1． 直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。次のものを求めよ。

(1)　直線 ℓ に関して，点 P$(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標

(2)　直線 ℓ に関して，直線 $m: 3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

解答　(1)　$\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$　　(2)　$13x-9y-4=0$

解説

(1)　点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから

$$\frac{q+2}{p}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

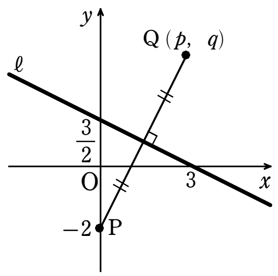
ゆえに　$2p-q-2=0$　…… ①

線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q-2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にある

から　$\dfrac{p}{2}+2\cdot\dfrac{q-2}{2}-3=0$

ゆえに　$p+2q-10=0$　…… ②

①，② を解いて　$p=\dfrac{14}{5}$，$q=\dfrac{18}{5}$　　よって　Q$\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$



(2)　ℓ，m の方程式を連立して解くと　$x=1$，$y=1$

ゆえに，2 直線 ℓ，m の交点 R の座標は　$(1,\ 1)$

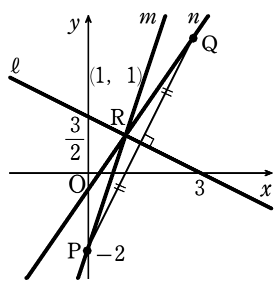
また，点 P の座標を直線 m の方程式に代入すると，

$3\cdot 0-(-2)-2=0$ となるから，点 P は直線 m 上にある。

よって，直線 n は，2 点 Q，R を通るから，その方程

式は　$\left(\dfrac{18}{5}-1\right)(x-1)-\left(\dfrac{14}{5}-1\right)(y-1)=0$

整理して　$13x-9y-4=0$



2． xy 平面上に 2 点 A$(3,\ 2)$，B$(8,\ 9)$ がある。点 P が直線 $\ell: y=x-3$ 上を動くとき，AP＋PB の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

解答　最小値 $3\sqrt{10}$，P の座標 $(6,\ 3)$

解説

図のように，2 点 A，B は直線 ℓ に関して同じ側にある。

直線 ℓ に関して A と対称な点を A′$(a,\ b)$ とする。

直線 AA′ は ℓ に垂直であるから

$$\frac{b-2}{a-3}\cdot 1=-1$$

ゆえに　$a+b=5$　…… ①

線分 AA′ の中点は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{2+b}{2}=\frac{3+a}{2}-3$$

ゆえに　$a-b=5$　…… ②

①，② を解いて　$a=5$，$b=0$

よって　A′$(5,\ 0)$

ここで　AP＋PB＝A′P＋PB≧A′B

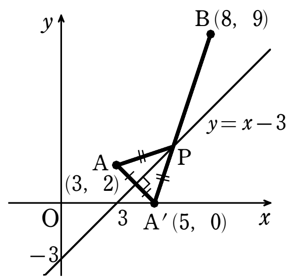
よって，3 点 A′，P，B が一直線上にあるとき，AP＋PB は最小になり，その最小値は

$$\text{A}'\text{B}=\sqrt{(8-5)^2+(9-0)^2}=3\sqrt{10}$$

また，直線 A′B の方程式は　$y=3x-15$　…… ③

直線 ③ と ℓ の方程式を連立して解くと　$x=6$，$y=3$

したがって，求める点 P の座標は　$(6,\ 3)$



3． (1)　次の点と直線の距離を求めよ。

（ア）　原点，$4x+3y-12=0$　　（イ）　点 $(2,\ -3)$，$2x-3y+5=0$

（ウ）　点 $(-1,\ 3)$，$x=2$　　（エ）　点 $(5,\ 6)$，$y=3$

(2)　平行な 2 直線 $x-2y+3=0$，$x-2y-1=0$ 間の距離を求めよ。

(3)　点 $(1,\ 1)$ から直線 $ax-2y-1=0$ に下ろした垂線の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　(1)　（ア）　$\dfrac{12}{5}$　　（イ）　$\dfrac{18}{\sqrt{13}}$　　（ウ）　3　　（エ）　3　　(2)　$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

(3)　$a=-3\pm\sqrt{10}$

解説

(1)　（ア）　$\dfrac{|4\cdot 0+3\cdot 0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{12}{5}$

（イ）　$\dfrac{|2\cdot 2-3\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{13}}$

（ウ）　x 座標の差から　$|2-(-1)|=3$

（エ）　y 座標の差から　$|3-6|=3$

(2)　直線 $x-2y+3=0$ 上の点 $(-3,\ 0)$ と直線 $x-2y-1=0$ の距離を求めて

$$\frac{|-3-2\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

別解　直線 $x-2y-1=0$ 上の点 $(1,\ 0)$ と直線 $x-2y+3=0$ の距離を求めて

$$\frac{|1-2\cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

(3)　点 $(1,\ 1)$ と直線 $ax-2y-1=0$ の距離は　$\dfrac{|a\cdot 1-2\cdot 1-1|}{\sqrt{a^2+(-2)^2}}=\dfrac{|a-3|}{\sqrt{a^2+4}}$

条件から　$\dfrac{|a-3|}{\sqrt{a^2+4}}=\sqrt{2}$　　両辺を 2 乗して　$\dfrac{(a-3)^2}{a^2+4}=2$

ゆえに　$(a-3)^2=2(a^2+4)$　　整理すると　$a^2+6a-1=0$

これを解いて　$a=-3\pm\sqrt{10}$

4．3 点 A (3, 5)，B (5, 2)，C (1, 1) について，次のものを求めよ。

(1) 直線 BC の方程式　　(2) 線分 BC の長さ

(3) 点 A と直線 BC の距離　　(4) △ABC の面積

解答　(1) $x-4y+3=0$　(2) $\sqrt{17}$　(3) $\dfrac{14}{\sqrt{17}}$　(4) 7

解説

(1) 直線 BC の方程式は　$y-2=\dfrac{1-2}{1-5}(x-5)$

よって　$x-4y+3=0$　…… ①

(2) 線分 BC の長さは

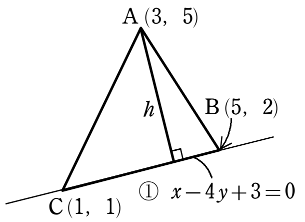
$$\sqrt{(1-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$$

(3) 点 A と直線 BC の距離 h は，① から

$$h=\frac{|3-4\cdot5+3|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{14}{\sqrt{17}}$$

(4) (2)，(3) から，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{14}{\sqrt{17}}=7$$



5．放物線 $y=x^2$ 上の点 P と，直線 $x-2y-4=0$ 上の点との距離の最小値を求めよ。また，そのときの点 P の座標を求めよ。

解答　最小値 $\dfrac{31\sqrt{5}}{40}$，$\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}\right)$

解説

P は放物線 $y=x^2$ 上の点であるから，その座標を $(t,\ t^2)$ と表す。

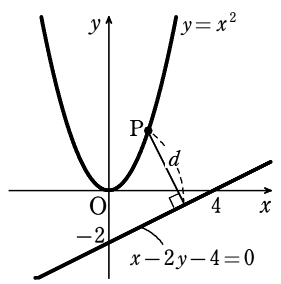
点 P$(t,\ t^2)$ と直線 $x-2y-4=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|t-2t^2-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2t^2-t+4|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}\right\}$$

よって，d は $t=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{31}{8}=\dfrac{31\sqrt{5}}{40}$ をとる。このとき，点 P の座標は　$\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}\right)$



6．xy 平面上の点 A (3, 1) と，x 軸上の点 B および直線 $y=x$ 上の点 C からなる △ABC 全体からなる集合を S とする。S に属する △ABC で，周囲の長さ AB＋BC＋CA が最小になるのは，B の x 座標が ア□，C の x 座標が イ□ のときであり，そのときの周囲の長さは，AB＋BC＋CA＝ウ□ である。

解答　(ア) $\dfrac{5}{2}$　(イ) $\dfrac{5}{3}$　(ウ) $2\sqrt{5}$

解説

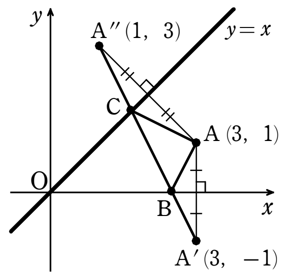
点 A と x 軸に関して対称な点は A′ (3, −1) であり，

点 A と直線 $y=x$ …… ① に関して対称な点は A″ (1, 3) である。

ここで　AB＋BC＋CA＝A′B＋BC＋CA″

$\geqq$ A′A″

であるから，4 点 A′，B，C，A″ が一直線上にあるとき，AB＋BC＋CA は最小となる。



直線 A′A″ の方程式は　$y-(-1)=\dfrac{3-(-1)}{1-3}(x-3)$

すなわち　$y=-2x+5$　…… ②

② において，$y=0$ とすると　$x=\dfrac{5}{2}$

また，①，② を連立して解くと　$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{5}{3}$

よって，B$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$，C$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ のとき AB＋BC＋CA は最小となる。

すなわち　(ア) $\dfrac{5}{2}$　(イ) $\dfrac{5}{3}$

このとき　AB＋BC＋CA＝A′A″＝$\sqrt{(1-3)^2+\{3-(-1)\}^2}$＝ウ$2\sqrt{5}$

7．$0<a<\sqrt{3}$ とする。3 直線 $\ell : y=1-x$，$m : y=\sqrt{3}x+1$，$n : y=ax$ がある。ℓ と m の交点を A，m と n の交点を B，n と ℓ の交点を C とする。

(1) 3 点 A，B，C の座標を求めよ。　(2) △ABC の面積 S を a で表せ。

(3) △ABC の面積 S が最小となる a を求めよ。また，そのときの S を求めよ。

解答　(1) A (0, 1)，B$\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{3}},\ \dfrac{a}{a-\sqrt{3}}\right)$，C$\left(\dfrac{1}{a+1},\ \dfrac{a}{a+1}\right)$

(2) $S=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-a)(a+1)}$　(3) $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$S=\sqrt{3}-1$

解説

(1) ℓ と m の y 切片はともに 1 である。

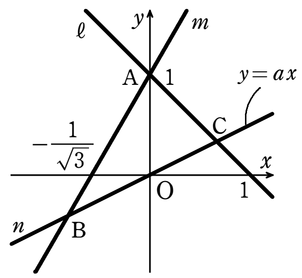
よって，点 A の座標は　(0, 1)

$\sqrt{3}x+1=ax$ とすると　$x=\dfrac{1}{a-\sqrt{3}}$

よって，点 B の座標は　$\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{3}},\ \dfrac{a}{a-\sqrt{3}}\right)$

$ax=1-x$ とすると　$x=\dfrac{1}{a+1}$

よって，点 C の座標は　$\left(\dfrac{1}{a+1},\ \dfrac{a}{a+1}\right)$



(2) $S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{a-\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{a+1}$

$$=\frac{-(a+1)+a-\sqrt{3}}{2(a-\sqrt{3})(a+1)}=\frac{-(1+\sqrt{3})}{2(a-\sqrt{3})(a+1)}=\frac{1+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-a)(a+1)}$$

別解　点 A，B，C をそれぞれ y 軸方向に -1 だけ平行移動した点を A′，B′，C′ とすると　A′(0, 0)，B′$\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{3}},\ \dfrac{\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}\right)$，C′$\left(\dfrac{1}{a+1},\ -\dfrac{1}{a+1}\right)$

$0<a<\sqrt{3}$ であるから

$$S=\triangle\mathrm{A'B'C'}=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{a-\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{a+1}\right)-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{|(a-\sqrt{3})(a+1)|}=\frac{1+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-a)(a+1)}$$

(3) $f(a)=(\sqrt{3}-a)(a+1)$ $(0<a<\sqrt{3})$ とすると，S が最小となるのは，$f(a)$ が最大となるときである。

$$f(a)=(\sqrt{3}-a)(a+1)=-a^2+(\sqrt{3}-1)a+\sqrt{3}$$

$$=-\left(a-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\sqrt{3}$$

$$=-\left(a-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$0<\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<\sqrt{3}$ であるから，$0<a<\sqrt{3}$ の範囲において，$f(a)$ は $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ をとる。

よって，S は $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき最小となり，その最小値は

$$S=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3=\sqrt{3}-1$$