数学演習（図形と方程式）Ｈ２４．２．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．2 点 A (2, 1)，B (5, −2) から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

２．3 点 A (5, 4)，B (0, −1)，C (8, −2) について，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 2 : 3 に外分する点P

(2) 線分 AB を3 : 2 に外分する点Q

(3) 線分 PQ の中点 M

(4) △ ABC の重心G

３．次のような直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1) 点 (−1, 3) を通り，直線 $2x+3y=0$ に平行な直線

(2) 2 点 A (1, 2)，B (4, 1) を結ぶ線分の垂直二等分線

４．直線 $3x+2y-6=0$ について，点(3, 1)と対称な点の座標を求めよ。

５．次の点と直線の距離を求めよ。　点 (2, −1)，直線 $5x+12y-3=0$

６．次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。　(−3, 4)，(4, 5)，(1, −4)

7．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(-2,\ 4)$ で，原点を通る円

(2)　2 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を直径の両端とする円

8．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ について

(1)　直線と円が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　直線と円が接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

9．点 $(-2,\ 4)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

10．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。

11．円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

12．2 つの円 $x^2+y^2=4$ …… ①，$x^2+y^2-2x-4y+3=0$ …… ② の 2 つの交点を A，B とするとき，次の直線および円の方程式を求めよ。

(1)　直線 AB

(2)　点 A，B と点 $(3,\ 0)$ を通る円

数学演習（図形と方程式）Ｈ２４．２．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．2 点 A$(2,\ 1)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

解答　$(4,\ 0)$

解説

求める点を $\mathrm{P}(x,\ 0)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から　　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

したがって　　$(x-2)^2+(0-1)^2=(x-5)^2+\{0-(-2)\}^2$

整理して　　$6x-24=0$

よって　　$x=4$

ゆえに，求める点の座標は　　$(4,\ 0)$

2．3 点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ について，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 3 に外分する点P

(2)　線分 AB を3 : 2 に外分する点Q

(3)　線分 PQ の中点 M

(4)　△ ABC の重心G

解答　(1)　$(15,14)$　(2)　$(-10,-11)$　(3)　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$　(4)　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

解説

(1)　P の座標は $\left(\dfrac{-3\cdot5+2\cdot0}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot4+2\cdot(-1)}{2-3}\right)$ から　　$(15,\ 14)$

(2)　Q の座標は $\left(\dfrac{-2\cdot5+3\cdot0}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot4+3\cdot(-1)}{3-2}\right)$ から　　$(-10,\ -11)$

(3)　線分 PQ の中点 M の座標は

$$\left(\frac{15+(-10)}{2},\ \frac{14+(-11)}{2}\right)\text{から}\quad\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

(4)　G の座標は $\left(\dfrac{5+0+8}{3},\ \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$ から　　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

3．次のような直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1)　点 $(-1,\ 3)$ を通り，直線 $2x+3y=0$ に平行な直線

(2)　2 点 A$(1,\ 2)$，B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解答　(1)　$2x+3y-7=0$　(2)　$3x-y-6=0$

解説

(1)　直線 $2x+3y=0$ の傾きは　　$-\dfrac{2}{3}$

平行な直線の方程式は

$$y-3=-\frac{2}{3}\{x-(-1)\}\quad\text{すなわち}\quad 2x+3y-7=0$$

(2)　線分 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{1+4}{2},\ \dfrac{2+1}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

また，直線 AB の傾きは　　$\dfrac{1-2}{4-1}=-\dfrac{1}{3}$

直線 AB に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{3}m=-1\qquad\text{ゆえに}\qquad m=3$$

よって，求める直線は，点 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，傾きが 3 であるから，その方程式は

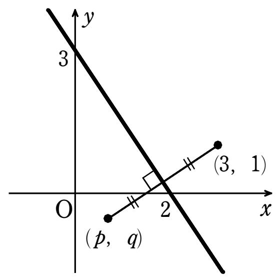
$$y-\frac{3}{2}=3\left(x-\frac{5}{2}\right)\qquad\text{すなわち}\qquad 3x-y-6=0$$

4．直線 $3x+2y-6=0$ について，点$(3,\ 1)$と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

解説

求める点の座標を $(p,\ q)$ とする。



2 点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を通る直線が直線 $3x+2y-6=0$ に垂直であるから

$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　　$2p-3q=3$　……①

また，2 点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点が，直線 $3x+2y-6=0$ 上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　　$3p+2q=1$　……②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{9}{13}$，$q=-\dfrac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

5．次の点と直線の距離を求めよ。　　点 $(2,\ -1)$，直線 $5x+12y-3=0$

解答　$\dfrac{5}{13}$

解説

$$\frac{|5\cdot2+12\cdot(-1)-3|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{169}}=\frac{5}{13}$$

6．次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。　$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

解答　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

解説

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(-3,\ 4)$ を通るから　　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　　$3l-4m-n=25$　……①

点 $(4,\ 5)$ を通るから　　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　　$4l+5m+n=-41$　……②

点 $(1,\ -4)$ を通るから　　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

ゆえに　　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③ を解いて　　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって　　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

7．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(-2,\ 4)$ で，原点を通る円

(2)　2 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を直径の両端とする円

解答　(1)　$(x+2)^2+(y-4)^2=20$　(2)　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

解説

(1)　求める円の半径を r とすると，円の方程式は　　$(x+2)^2+(y-4)^2=r^2$

これが原点を通るから　　$(0+2)^2+(0-4)^2=r^2$　　ゆえに　　$r^2=20$

よって　　$(x+2)^2+(y-4)^2=20$

(2)　円の中心は，与えられた 2 点を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)\qquad\text{すなわち}\qquad(1,\ 2)$$

半径は　　$\dfrac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$

よって　　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

8．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ について

(1)　直線と円が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　直線と円が接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

解答　(1)　$k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$

(2)　$k=\sqrt{5}$ のとき $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$k=-\sqrt{5}$ のとき $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

解説

$$\begin{cases}y=2x+k & \cdots\cdots①\\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

① を ② に代入して　　$x^2+(2x+k)^2=1$

整理すると　　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　……③

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5=-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})$

(1)　直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は　　$D<0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$　　よって　　$k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$

(2)　また，直線 ① と円 ② が接するための条件は　　$D=0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})=0$　　よって　　$k=\pm\sqrt{5}$

また，2 次方程式 ③ が重解をもつとき，その重解は解の公式より

$$x=\frac{-4k\pm\sqrt{0}}{2\cdot5}=-\frac{2k}{5}\quad\text{このとき，① から接点の}y\text{座標は}$$

$$y=2\left(-\frac{2k}{5}\right)+k=\frac{k}{5}\quad\text{つまり接点の座標は}\quad\left(-\frac{2k}{5},\ \frac{k}{5}\right)\quad\text{となる}$$

$k=\sqrt{5}$ のとき，接点の座標は　　$\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のとき，接点の座標は　　$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

9．点$(-2,\ 4)$から円$x^2+y^2=10$に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

解説

接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから　　$a^2+b^2=10$　……①

点 P における接線の方程式は　　$ax+by=10$　……②

この直線が点 $(-2,\ 4)$ を通るから　　$-2a+4b=10$

よって　　$a=2b-5$　……③

③ を ① に代入して　　$(2b-5)^2+b^2=10$

ゆえに　　$b^2-4b+3=0$　　これを解いて　　$b=1,\ 3$

[1]　$b=1$ のとき，③ から　　$a=-3$

よって，接点の座標は　　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，② から　　$-3\cdot x+1\cdot y=10$　　すなわち　　$-3x+y=10$

[2]　$b=3$ のとき，③ から　　$a=1$

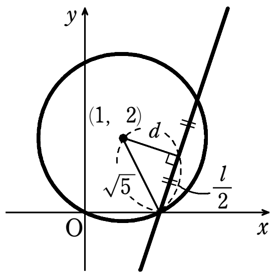
よって，接点の座標は　　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，② から　　$1\cdot x+3\cdot y=10$　　すなわち　　$x+3y=10$

10. 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。

解答　$\sqrt{10}$

解説



$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ …… ①，$y=3x-6$ …… ②
とする。
円 ① の中心 $(1,\ 2)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

弦の長さを l とすると，円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから
三平方の定理から

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\frac{5}{2}$$

ゆえに　$l^2=10$　　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$

11. 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=43$

解説

円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$$y-7=-\frac{3}{4}(x-5)\qquad すなわち\qquad 3x+4y=43$$

12. 2 つの円 $x^2+y^2=4$ …… ①，$x^2+y^2-2x-4y+3=0$ …… ② の 2 つの交点を A，B とするとき，次の直線および円の方程式を求めよ。

(1)　直線 AB　　　　(2)　点 A，B と点 $(3,\ 0)$ を通る円

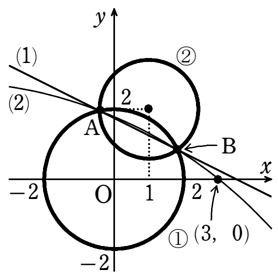
解答　(1)　$2x+4y-7=0$　　(2)　$x^2+y^2+10x+20y-39=0$

解説

k を定数として，次の方程式を考える。

$$k(x^2+y^2-4)+x^2+y^2-2x-4y+3=0 \quad …… ③$$

③ は，2 つの円 ①，② の交点 A，B を通る図形を表す。



(1)　$k=-1$ のとき，③ は　$-2x-4y+7=0$
すなわち　$2x+4y-7=0$
これは直線を表すから，求める直線 AB の方程式である。

(2)　③ が点 $(3,\ 0)$ を通るとして，③ に $x=3,\ y=0$ を代入すると　$5k+6=0$

よって　$k=-\dfrac{6}{5}$

③ に代入して　$-\dfrac{6}{5}(x^2+y^2-4)+x^2+y^2-2x-4y+3=0$

整理すると　$x^2+y^2+10x+20y-39=0$

これは円を表すから，求める方程式である。