数学演習（図形と方程式）Ｈ２２．３．３０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

１．y 軸上の点で，2 点 A$(2,\ -3)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

２．3 点 O$(0,\ 0)$，A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ -8)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　ABを2：3に内分する点P　　(2)　ABを3：1に外分する点Q

(3)　△OABの重心G

３．(1) 点$(-2,\ 3)$ を通り，直線 $3x-5y-12=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

４．直線$3x-2y+12=0$に関して，点$(-3,\ 5)$ と対称な点の座標を求めよ。

５．中心が点$(-1,\ 2)$ で，直線 $4x+3y-12=0$ に接する円の方程式を求めよ。

６．円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x-ky+3=0$ が異なる２個の共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

7．A$(-3,\ 4)$，B$(4,\ 5)$，C$(1,\ -4)$において，△ABCの外接円の中心の座標と半径を求めよ。

8．円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

9．点$(-2,\ 4)$から円$x^2+y^2=10$に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

10．点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

11．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。また，弦の中点の座標を求めよ。

12．円$x^2+y^2-2x-4y-3=0$と直線$x+2y=5$の 2 つの交点と点 A $(3,\ 2)$ を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

数学演習（図形と方程式）Ｈ２２．３．３０

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1． y 軸上の点で，2 点 A$(2,\ -3)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

解答　$(0,\ 8)$

求める点を P$(0,\ y)$ とする。

AP＝BP であるから　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(0-2)^2+(y+3)^2=(0-5)^2+(y+2)^2$

これを解いて　$y=8$

ゆえに，求める座標は　$(0,\ 8)$

2． 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ -8)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　ABを2 : 3に内分する点P　　(2)　ABを3 : 1に外分する点Q

(3)　△OABの重心G

解答　(1)　$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{5},\ -2\right)$　(2)　$\mathrm{Q}\left(\frac{15}{2},\ -13\right)$　(3)　$\mathrm{G}\left(\frac{1}{3},\ -2\right)$

(1)　$\left(\frac{3\cdot(-3)+2\cdot 4}{2+3},\ \frac{3\cdot 2+2\cdot(-8)}{2+3}\right)$　すなわち　$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{5},\ -2\right)$

(2)　$\left(\frac{-1\cdot(-3)+3\cdot 4}{3-1},\ \frac{-1\cdot 2+3\cdot(-8)}{3-1}\right)$　すなわち　$\mathrm{Q}\left(\frac{15}{2},\ -13\right)$

(3)　$\left(\frac{0+(-3)+4}{3},\ \frac{0+2+(-8)}{3}\right)$　すなわち　$\mathrm{G}\left(\frac{1}{3},\ -2\right)$

3． (1) 点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $3x-5y-12=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解答　(1)　順に　$3x-5y+21=0$，$5x+3y+1=0$　(2)　$y=2x+1$

(1)　直線 $3x-5y-12=0$ の傾きは　$\frac{3}{5}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-3=\frac{3}{5}(x+2)$　すなわち　$3x-5y+21=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$\frac{3}{5}m=-1$　よって　$m=-\frac{5}{3}$

ゆえに，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=-\frac{5}{3}(x+2)$　すなわち　$5x+3y+1=0$

(2)　直線 AB の傾きは　$\frac{2-4}{3-(-1)}=-\frac{1}{2}$

線分 AB の中点の座標は　$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$　すなわち　$(1,\ 3)$

よって，求める垂直二等分線は，点 $(1,\ 3)$ を通り，傾きが 2 の直線である。

ゆえに　$y-3=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+1$

4． 直線$3x-2y+12=0$に関して，点 $(-3,\ 5)$ と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\frac{3}{13},\ \frac{37}{13}\right)$

求める点の座標を $(p,\ q)$ とする。

2 点 $(-3,\ 5)$，$(p,\ q)$ を通る直線と直線 $3x-2y+12=0$ は垂直であるから，$p\neq -3$

で　$\frac{q-5}{p+3}\cdot\frac{3}{2}=-1$

ゆえに　$2p+3q=9$　…… ①

2 点 $(-3,\ 5)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点 $\left(\frac{p-3}{2},\ \frac{q+5}{2}\right)$ が直線 $3x-2y+12=0$ 上に

あるから　$3\cdot\frac{p-3}{2}-2\cdot\frac{q+5}{2}+12=0$

ゆえに　$3p-2q=-5$　…… ②

①，② を解いて　$p=\frac{3}{13}$，$q=\frac{37}{13}$

よって，求める点の座標は　$\left(\frac{3}{13},\ \frac{37}{13}\right)$

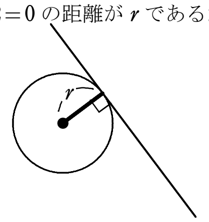
5． 中心が点 $(-1,\ 2)$ で，直線 $4x+3y-12=0$ に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

円の半径を r とすると，中心 $(-1,\ 2)$ と直線 $4x+3y-12=0$ の距離が r であるから

$r=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 2-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

よって　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$



6． 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x-ky+3=0$ が異なる 2 個の共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$

$x^2+y^2=1$　…… ①，$x-ky+3=0$　…… ② とする。

円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離は　$\frac{|1\cdot 0+(-k)\cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+(-k)^2}}=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$

また，円 ① の半径は　1

中心と直線の距離dと円の半径rについて，「交点の個数が２個$\Leftrightarrow d<r$」が成り立つ。

ここで，$d=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$，$r=1$であるから，$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}<1$ を解く

両辺はともに正であるから，２乗して

$\frac{9}{k^2+1}<1$

ここで，k^2+1は正の数なので，両辺にk^2+1をかけても不等号の向きは変わらない。

$3^2<k^2+1$　ゆえに　$k^2-8>0$　つまり　$(k-2\sqrt{2})(k+2\sqrt{2})>0$

よって　$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$

別解　② から　$x=ky-3$　…… ③

③ を ① に代入して　$(ky-3)^2+y^2=1$

整理すると　$(k^2+1)y^2-6ky+8=0$

判別式は　$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(k^2+1)\cdot 8=k^2-8=(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})$

したがって，共有点の個数が２個なので，$D>0$

すなわち　$(k-2\sqrt{2})(k+2\sqrt{2})>0$　より　$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$

7． A$(-3,\ 4)$，B$(4,\ 5)$，C$(1,\ -4)$において，△ABCの外接円の中心の座標と半径を求めよ。

解答　中心$(1,\ 1)$，半径 5

求める外接円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 A$(-3,\ 4)$ を通るから　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　$3l-4m-n=25$　…… ①

点 B$(4,\ 5)$ を通るから　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　$4l+5m+n=-41$　…… ②

点C$(1,\ -4)$ を通るから　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

ゆえに　$l-4m+n=-17$　…… ③

①，②，③ を解いて　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

平方完成すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=25$

以上より，　外接円の中心の座標は　$(1, 1)$　半径は　5

8． 円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$2x-3y+2=0$

円の方程式を変形すると　$(x+3)^2+(y-3)^2=13$

円の中心 $(-3,\ 3)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る直線の傾きは　$\frac{0-3}{-1+3}=-\frac{3}{2}$

接線はこの直線と垂直であり，点 $(-1,\ 0)$ を通るから，その方程式は　$y=\frac{2}{3}(x+1)$

よって　$2x-3y+2=0$

9． 点$(-2,\ 4)$から円$x^2+y^2=10$に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

接点を P$(a,\ b)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから　$a^2+b^2=10$　…… ①

点 P における接線の方程式は　$ax+by=10$　…… ②

この直線が点 $(-2,\ 4)$ を通るから　$-2a+4b=10$

よって　$a=2b-5$　…… ③

③ を ① に代入して　$(2b-5)^2+b^2=10$

ゆえに　$b^2-4b+3=0$　これを解いて　$b=1,\ 3$

[1]　$b=1$ のとき，③ から　$a=-3$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，② から　$-3\cdot x+1\cdot y=10$　すなわち　$-3x+y=10$

[2]　$b=3$ のとき，③ から　$a=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，② から　$1\cdot x+3\cdot y=10$　すなわち　$x+3y=10$

10． 点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x+10$，$y=\frac{1}{3}x$

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$　…… ①

この円は中心 $(1,\ -3)$，半径 $\sqrt{10}$ であるから，点 $(3,\ 1)$ から引いた接線は x 軸に垂直ではない。

接線の方程式を　$y=m(x-3)+1$　…… ② とすると

$mx-y-3m+1=0$

円 ① の中心 $(1,\ -3)$ と接線の距離が，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$\frac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

分母を払って　$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　$(m+3)(3m-1)=0$　よって　$m=-3,\ \frac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10$，$y=\frac{1}{3}x$

別解　② を ① に代入して　$(x-1)^2+\{m(x-3)+4\}^2=10$

展開して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$$

円 ① と直線 ② が接するための条件は，この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(3m^2-4m+1)^2-(m^2+1)(9m^2-24m+7)$$

$$=(9m^4+16m^2+1-24m^3-8m+6m^2)-(9m^4-24m^3+7m^2+9m^2-24m+7)$$

$$=2(3m^2+8m-3)=2(m+3)(3m-1)$$

であるから　$(m+3)(3m-1)=0$

よって　$m=-3,\ \frac{1}{3}$

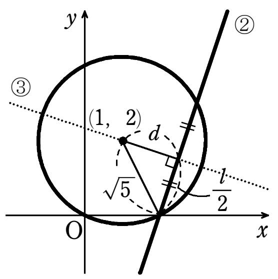
したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10$，$y=\frac{1}{3}x$

11. 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。また，弦の中点の座標を求めよ。

解答　順に $\sqrt{10}$，$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$　…… ①，$y=3x-6$　…… ②

とする。



円 ① の中心 (1，2) と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

弦の長さを l とすると，円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\frac{5}{2}$$

ゆえに　$l^2=10$　　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$

円 ① の中心 (1，2) を通り，直線 ② に垂直な直線の方程式は　$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$

すなわち　$x+3y-7=0$　…… ③

直線 ②，③ の交点が，弦の中点であるから，②，③ を連立して解くと　$x=\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$

したがって，弦の中点の座標は　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

12. 円 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ と直線 $x+2y=5$ の 2 つの交点と点 A (3，2) を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

解答　中心　(0，0)　半径　$\sqrt{13}$

k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-2x-4y-3+k(x+2y-5)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は円と直線の交点を通る。

これが A (3，2) を通るとき

$$3^2+2^2-2\cdot3-4\cdot2-3+k(3+2\cdot2-5)=0$$

整理して　$2k-4=0$

よって　$k=2$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2=13$

これが求める円の方程式である。

ゆえに，中心　(0，0)　半径　$\sqrt{13}$