数学演習（図形と方程式１）Ｈ２１．１１．５　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１. 2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

２. 3 点 A$(5,\ -1)$，B$(3,\ 3)$，C$(-1,\ -3)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ。

３. 3 点 A$(7,\ -2)$，B$(2,\ 8)$，C$(-1,\ 2)$ に対して，辺 BC の中点を P，辺 CA を 3 : 2 に外分する点を Q，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を R とする。このとき，△PQR の重心の座標を求めよ。

４. 2 直線 $2x+5y-3=0$ …… ①，$5x+ky-2=0$ …… ② が平行になるときと垂直になるときの定数 k の値を，それぞれ求めよ。

５. 直線 $(4k-3)y=(3k-1)x-1$ は，実数 k の値にかかわらず，定点 A を通る。この点 A の座標を求めよ。

６. 2 直線 $2x+3y=7$ …… ①，$4x+11y=19$ …… ② の交点を通り，点 $(5,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めよ。

７. 3 直線 $2x-3y-1=0$，$3x+5y-11=0$，$5x+2y-31=0$ で作られる三角形の面積を求めよ。

8．放物線 $y=x^2+1$ 上の点 P と，2 点 A$(-2,\ 1)$，B$(2,\ -1)$ とを結んで △PAB を作るとき，その面積の最小値を求めよ。

9．3 点 A$(0,\ 0)$，B$(2,\ 5)$，C$(6,\ 0)$ に対し $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ の最小値およびそのときの点 P の座標を求めよ。

10. 2 直線 $\ell:2x-y+3=0$，$m:3x-2y-1=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 2 直線 ℓ，m の交点の座標を求めよ。

(2) m 上の点 P$(3,\ 4)$ の，直線 ℓ に関する対称点の座標を求めよ。

(3) 直線 ℓ に関して，直線 m と対称な直線の方程式を求めよ。

11. 3 直線 $\ell:x-2y+8=0$，$m:x+y-1=0$，$n:ax+y-5=0$ が三角形を作らないように定数 a の値を定めよ。

12. A$(5,\ 1)$，B$(2,\ 6)$ とする。x 軸上に点 P，y 軸上に点 Q をとるとき，AP＋PQ＋QB を最小にする点 P，Q の座標を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

数学演習（図形と方程式１）Ｈ２１．１１．５

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

解答　$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

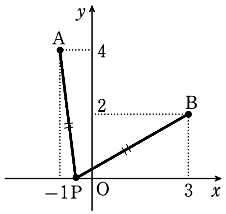
点 P の座標を P$(x,\ 0)$ とする。

PA＝PB すなわち $PA^2=PB^2$ から

$$(-1-x)^2+(4-0)^2=(3-x)^2+(2-0)^2$$

整理すると　$8x=-4$　　よって　$x=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，点 P の座標は　$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$



２．3 点 A$(5,\ -1)$，B$(3,\ 3)$，C$(-1,\ -3)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ。

解答　$(1,\ -7)$，$(-3,\ 1)$，$(9,\ 5)$

残りの頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。

平行四辺形の頂点の順序は，次の 3 つの場合がある。

[1]　ABCD　　[2]　ABDC　　[3]　ADBC

[1]　平行四辺形 ABCD の場合

線分 DB と線分AC の中点が一致するから

$$\frac{x+3}{2}=\frac{5+(-1)}{2},\quad \frac{y+3}{2}=\frac{(-1)+(-3)}{2}$$

したがって　$x=1$，$y=-7$

[2]　平行四辺形 ABDC の場合

線分 DA と線分 BC の中点が一致するから

$$\frac{x+5}{2}=\frac{3+(-1)}{2},\quad \frac{y+(-1)}{2}=\frac{3+(-3)}{2}$$

したがって　$x=-3$，$y=1$

[3]　平行四辺形 ADBC の場合

線分 DC と線分 AB の中点が一致するから

$$\frac{x+(-1)}{2}=\frac{5+3}{2},\quad \frac{y+(-3)}{2}=\frac{(-1)+3}{2}$$

したがって　$x=9$，$y=5$

以上から，頂点 D の座標は　$(1,\ -7)$，$(-3,\ 1)$，$(9,\ 5)$

３．3 点 A$(7,\ -2)$，B$(2,\ 8)$，C$(-1,\ 2)$ に対して，辺 BC の中点を P，辺 CA を 3 : 2 に外分する点を Q，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を R とする。このとき，△PQR の重心の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{55}{6},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

点 P の座標は　$\left(\dfrac{2+(-1)}{2},\ \dfrac{8+2}{2}\right)$

すなわち　P$\left(\dfrac{1}{2},\ 5\right)$

点 Q の座標は　$\left(\dfrac{(-2)\cdot(-1)+3\cdot 7}{3-2},\ \dfrac{(-2)\cdot 2+3\cdot(-2)}{3-2}\right)$

すなわち　Q$(23,\ -10)$

点 R の座標は　$\left(\dfrac{2\cdot 7+3\cdot 2}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 8}{3+2}\right)$

すなわち　R$(4,\ 4)$

よって，△PQR の重心の座標は　$\left(\dfrac{\frac{1}{2}+23+4}{3},\ \dfrac{5-10+4}{3}\right)$

したがって　$\left(\dfrac{55}{6},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

４．2 直線 $2x+5y-3=0$ ……①，$5x+ky-2=0$ ……② が平行になるときと垂直になるときの定数 k の値を，それぞれ求めよ。

解答　平行になるとき $k=\dfrac{25}{2}$，垂直になるとき $k=-2$

$k=0$ のとき，直線 ② は $x=\dfrac{2}{5}$ となり，① と ② は平行でも垂直でもないから　$k\neq 0$

ゆえに，直線 ① の傾きは　$-\dfrac{2}{5}$，　直線 ② の傾きは　$-\dfrac{5}{k}$

2 直線 ①，② が平行であるための条件は

$-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{5}{k}$　　これを解いて　$k=\dfrac{25}{2}$

2 直線 ①，② が垂直であるための条件は

$-\dfrac{2}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{k}\right)=-1$　　これを解いて　$k=-2$

５．直線 $(4k-3)y=(3k-1)x-1$ は，実数 k の値にかかわらず，定点 A を通る。この点 A の座標を求めよ。

解答　A$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

直線の方程式を k について整理すると

$$(3x-4y)k-(x-3y+1)=0\quad\cdots\cdots[A]$$

[A] が実数 k の恒等式となるための条件は

$$3x-4y=0,\quad x-3y+1=0$$

これを解いて　$x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{3}{5}$

このとき，[A] は k の値にかかわらず成り立つ。

よって，[A] は，k の値にかかわらず定点 A$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ を通る。

６．2 直線 $2x+3y=7$ ……①，$4x+11y=19$ ……② の交点を通り，点 $(5,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$x-y-1=0$

k を定数とするとき，次の方程式 ③ の表す図形は，2 直線 ①，② の交点を通る直線である。

$$k(2x+3y-7)+(4x+11y-19)=0\quad\cdots\cdots ③$$

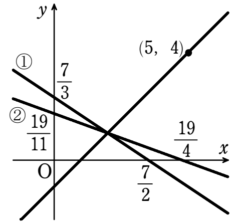
この直線が，点 $(5,\ 4)$ を通るための条件は，③ に $x=5$，$y=4$ を代入すると

$15k+45=0$　　よって　$k=-3$

これを ③ に代入すると

$$-3(2x+3y-7)+(4x+11y-19)=0$$

整理すると　$x-y-1=0$



７．3 直線 $2x-3y-1=0$，$3x+5y-11=0$，$5x+2y-31=0$ で作られる三角形の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{19}{2}$

$2x-3y-1=0$ ……①，$3x+5y-11=0$ ……②，$5x+2y-31=0$ ……③ とする。

また，直線 ① と直線 ② の交点を A，直線 ② と直線 ③ の交点を B，直線 ③ と直線 ① の交点を C とする。

①，② を連立させて解くと　$x=2$，$y=1$

よって，点 A の座標は　A$(2,\ 1)$

②，③ を連立させて解くと　$x=7$，$y=-2$

よって，点 B の座標は　B$(7,\ -2)$

①，③ を連立させて解くと　$x=5$，$y=3$

よって，点 C の座標は　C$(5,\ 3)$

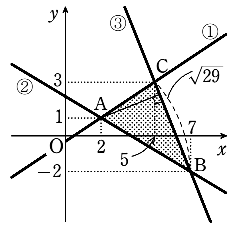
したがって　$BC=\sqrt{(5-7)^2+\{3-(-2)\}^2}=\sqrt{29}$

また，点 A と直線 ③ の距離は

$$\frac{|5\cdot 2+2\cdot 1-31|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{19}{\sqrt{29}}$$

ゆえに，求める三角形の面積は

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{19}{\sqrt{29}}=\frac{19}{2}$$



8. 放物線 $y=x^2+1$ 上の点Pと，2点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -1)$ とを結んで △PAB を作るとき，その面積の最小値を求めよ。

解答 $\dfrac{15}{8}$

辺 AB を底辺とみるとき，△PAB の高さを h とすると，h は点Pと直線 AB の距離である。

直線 AB の方程式は　$y-1=\dfrac{-1-1}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$

すなわち　$x+2y=0$

$\mathrm{P}(t,\ t^2+1)$ とすると

$$h=\frac{|t+2(t^2+1)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2t^2+t+2|}{\sqrt{5}}$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{|2t^2+t+2|}{\sqrt{5}}$

$$=|2t^2+t+2|=\left|2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\right|$$

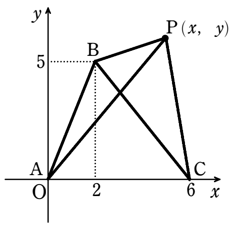
$$=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$$

ゆえに，△PAB の面積は $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{15}{8}$ をとる。

9. 3点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 5)$，$\mathrm{C}(6,\ 0)$ に対し $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ の最小値およびそのときの点Pの座標を求めよ。

解答 最小値 $\dfrac{106}{3}$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると



$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$

$=(x^2+y^2)+\{(x-2)^2+(y-5)^2\}+\{(x-6)^2+y^2\}$

$=3x^2-16x+3y^2-10y+65$

$=3\left\{x^2-2\cdot\dfrac{8}{3}x+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2\right\}-3\left(\dfrac{8}{3}\right)^2$

$\quad+3\left\{y^2-2\cdot\dfrac{5}{3}y+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right\}-3\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+65$

$=3\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+3\left(y-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{106}{3}$　…… ①

① において　$3\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2\geqq 0,\ 3\left(y-\dfrac{5}{3}\right)^2\geqq 0$

よって，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ は，$x=\dfrac{8}{3}$，$y=\dfrac{5}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{106}{3}$ をとり，そのときの点Pの座標は　$\mathrm{P}\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

10. 2直線 $\ell: 2x-y+3=0$，$m: 3x-2y-1=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 2直線 ℓ，m の交点の座標を求めよ。

(2) m 上の点 $\mathrm{P}(3,\ 4)$ の，直線 ℓ に関する対称点の座標を求めよ。

(3) 直線 ℓ に関して，直線 m と対称な直線の方程式を求めよ。

解答 (1) $(-7,\ -11)$　(2) $(-1,\ 6)$　(3) $17x-6y+53=0$

(1) $2x-y+3=0$ …… ①，$3x-2y-1=0$ …… ② とする。

①×2−② から　$x+7=0$　よって　$x=-7$

① に代入して　$y=2x+3=2\cdot(-7)+3=-11$

ゆえに，2直線 ℓ，m の交点の座標は　$(-7,\ -11)$

(2) 求める対称点を $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とする。

$\mathrm{PQ}\perp\ell$ から　$\dfrac{b-4}{a-3}\cdot 2=-1$

よって　$a+2b-11=0$　…… ③

線分 PQ の中点は直線 ℓ 上にあるから

$$2\cdot\frac{3+a}{2}-\frac{4+b}{2}+3=0$$

よって　$2a-b+8=0$　…… ④

③，④ を連立させて解くと　$a=-1$，$b=6$

したがって，求める点の座標は　$(-1,\ 6)$

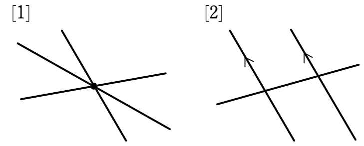
(3) 2直線 ℓ，m の交点 $(-7,\ -11)$ と，(2) で求めた対称点Qとを通る直線が求める直線である。その方程式は

$$y-6=\frac{-11-6}{-7-(-1)}\{x-(-1)\}$$

すなわち　$17x-6y+53=0$

11. 3直線 $\ell: x-2y+8=0$，$m: x+y-1=0$，$n: ax+y-5=0$ が三角形を作らないように定数 a の値を定めよ。

解答 $a=-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 1$



3直線が三角形を作らない条件は

[1] 3直線が1点で交わるとき

[2] 2直線が平行であるとき

[1] 3直線が1点で交わるとき

直線 ℓ，m の交点の座標は

$(-2,\ 3)$

直線 n がこの点を通るとき　$a\cdot(-2)+3-5=0$

よって　$a=-1$

[2] いずれか2直線が平行であるとき

ℓ，m，n の傾きはそれぞれ　$\dfrac{1}{2}$，-1，$-a$

ℓ と m は平行でないから

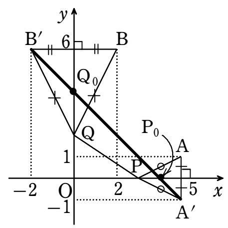
$\ell /\!/ n$ のとき　$\dfrac{1}{2}=-a$　すなわち　$a=-\dfrac{1}{2}$

$m /\!/ n$ のとき　$-1=-a$　すなわち　$a=1$

以上から　$a=-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 1$

12. $\mathrm{A}(5,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 6)$ とする。x 軸上に点P，y 軸上に点Qをとるとき，AP+PQ+QB を最小にする点P，Qの座標を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

解答 $\mathrm{P}(4,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 4)$ のとき最小値 $7\sqrt{2}$



x 軸に関してAと対称な点を A′，y 軸に関してBと対称な点を B′ とすると，その座標は

$\mathrm{A}'(5,\ -1)$，$\mathrm{B}'(-2,\ 6)$

このとき　$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'}$

$\geqq\mathrm{A'B'}$

よって，4点 A′，P，Q，B′ が同じ直線上にあるとき，AP+PQ+QB は最小になる。

直線 A′B′ の方程式は　$y-(-1)=\dfrac{6-(-1)}{-2-5}(x-5)$

すなわち　$y=-x+4$

直線 A′B′ と x 軸，y 軸の交点を，それぞれ $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ とすると，その座標は

$\mathrm{P_0}(4,\ 0)$，$\mathrm{Q_0}(0,\ 4)$

また，2点 A′，B′ 間の距離は

$\mathrm{A'B'}=\sqrt{(-2-5)^2+\{6-(-1)\}^2}=\sqrt{(-7)^2+7^2}=7\sqrt{2}$

したがって，AP+PQ+QB は，$\mathrm{P}(4,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 4)$ のとき，最小値 $7\sqrt{2}$ をとる。