１．３点A$(5, 4)$，B$(0, -1)$，C$(8, -2)$ について，線分ABを$2:3$に内分する点をP，$2:3$に外分する点をQとし，線分PQの中点をMとする。また，△ABCの重心をGとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点Mの座標を求めよ。

(2) 点Gを通り，線分CAに垂直な直線の方程式を求めよ。

２．３点A$(1, 0)$，B$(0, 2)$，Cにおいて，△ABCが正三角形となるとき，点Cの座標を求めよ。

３．点$(1, 1)$を通り，y軸に接し，中心が$y=2x$上にあるような円の方程式を求めよ。

４．座標平面上に２点A$(0, 6)$，B$(1, 0)$がある。また，点Pが直線$l: y=-2x+1$上を動くとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線lに関して，点Aと対称な点A’の座標を求めよ。

(2) 線分の和 AP+PB の最小値を求めよ。

5．点$(-5, 10)$から円$x^2+y^2=25$に引いた接線の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

6．直線$l：kx-y-k=0$と円$C：x^2+y^2-2x-6y+7=0$について，以下の問いに答えよ。

(1) 直線lはkの値によらず定点を通る。この定点の座標を求めよ。

(2) 直線lと円Cとの共有点の個数を，kの値の範囲によって場合分けせよ。

7．2円$x^2+y^2+2x-4y-12=0$…①，$x^2+y^2-4x+2y-6=0$…②について，2円の交点をA, Bとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線ABの方程式を求めよ。

(2) 線分ABの長さを求めよ。

(3) 円①上を点Pが動くとする。△PABの面積の最大値を求めよ。

数学演習（図形と方程式）Ｈ２１．１．１５　　　　（　）組（　）番　名前（ こたえ ）

１．３点 $A(5,4)$, $B(0,-1)$, $C(8,-2)$ について，線分 AB を２：３に内分する点を P，２：３に外分する点を Q とし，線分 PQ の中点を M とする。また，$\triangle ABC$ の重心を G とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 M の座標を求めよ。

$P\left(\dfrac{3\cdot5+2\cdot0}{2+3}, \dfrac{3\cdot4+2\cdot(-1)}{2+3}\right)$ より $P(3,2)$

$Q\left(\dfrac{-3\cdot5+2\cdot0}{2-3}, \dfrac{-3\cdot4+2\cdot(-2)}{2-3}\right)$ より $Q(15,14)$

10

よって $M\left(\dfrac{3+15}{2}, \dfrac{2+14}{2}\right)$ より $M(9,8)$

(2) 点 G を通り，線分 CA に垂直な直線の方程式を求めよ。

$G\left(\dfrac{5+0+8}{3}, \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$ より $G\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

CA の傾きは $\dfrac{-2-4}{8-5}=-2$ より，CA に垂直な直線の傾きは $\dfrac{1}{2}$．よって $G\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ を通るので

$y-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{13}{3}\right)$　∴ $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{6}$

10

２．３点 $A(1,0)$, $B(0,2)$, C が正三角形となるとき，点 C の座標を求めよ。

において．$\triangle ABC$

$C(a,b)$ とおく時．$AB=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$ より

$AC=\sqrt{5}$ かつ．$BC=\sqrt{5}$ が成り立てばよい．

$AC^2=(a-1)^2+(b-0)^2=5$ …①

$BC^2=(a-0)^2+(b-2)^2=5$ …②　ここで

①－② より $2a-4b=-3$

∴ $a=2b-\dfrac{3}{2}$ として

②に代入すると．

$\left(2b-\dfrac{3}{2}\right)^2+(b-2)^2=5$

整理して

$4b^2-8b+1=0$

∴ $b=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4}}{4}=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

$a=2b-\dfrac{3}{2}$

$=2\cdot\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{1\pm2\sqrt{3}}{2}$

∴ $C\left(\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$

$\left(\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}, \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

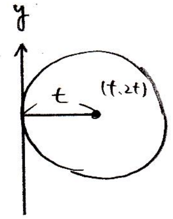
10

３．点 $(1,1)$ を通り，y 軸に接し，中心が $y=2x$ 上にあるような円の方程式を求めよ。

中心の座標を $(t, 2t)$ とおく

ここで．y 軸に接し．かつ 点 $(1,1)$ を通るので．$t>0$ である．

すると．この円の半径は t となる



∴ $(x-t)^2+(y-2t)^2=t^2$

$(1,1)$ を通るので

$(1-t)^2+(1-2t)^2=t^2$

整理して．

$2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0$

∴ $t=1, \dfrac{1}{2}$

・$t=1$ の時　$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

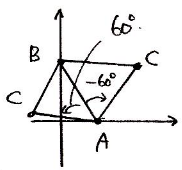
$t=\dfrac{1}{2}$ の時　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$

10

２．の別解．(理系向け)

A を中心に．B を $\pm60°$ 回転させたものが C．

よって $C(a,b)$ とおいて．3点 A, B, C を x 軸方向に -1 だけ平行移動すると



A は $A'(0,0)$．

B は $B'(-1,2)$

C は $C'(a-1,b)$

にうつる。ゆえに

$\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\pm60°) & -\sin(\pm60°) \\ \sin(\pm60°) & \cos(\pm60°) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mp\sqrt{3} \\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{pmatrix}$

よって

$a=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{3}$

$b=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに

$C\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}, 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}, 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

４．座標平面上に２点 $A(0,6)$, $B(1,0)$ がある。また，点 P が直線 $l: y=-2x+1$ 上を動くとする。このとき，以下の問いに答えよ。

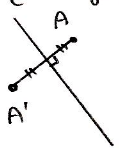
(1) 直線 l に関して，点 A と対称な点 A' の座標を求めよ。

$A'(a,b)$ とおく．

この時 (i) $AA'\perp l$ より $\dfrac{b-6}{a-0}\times(-2)=-1$

整理して $a-2b=-12$

(ii) AA' の中点が l 上



より AA' の中点は $\left(\dfrac{0+a}{2}, \dfrac{6+b}{2}\right)$ より

$\dfrac{6+b}{2}=-2\cdot\dfrac{0+a}{2}+1$

整理して $2a+b=-4$

連立して．

$\begin{cases} a-2b=-12 \\ 2a+b=-4 \end{cases}$　∴

∴ $a=-4$，$b=4$　　$A'(-4,4)$

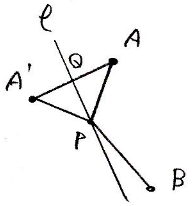
10

(2) 線分の和 $AP+PB$ の最小値を求めよ。

線分 AA' と l の交点を Q とすると

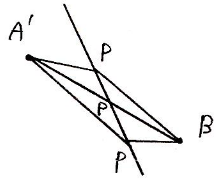
$AQ=A'Q$．PQ 共通．$\angle PQA=\angle PQA'=90°$

より $\triangle PQA$ と $\triangle PQA'$ は合同



よって $AP=A'P$ が成り立つ。

ゆえに $AP+PB$ は $A'P+PB$ に等しくなる。この $A'P+PB$ が最小になるのは



3点 A', P, B が一直線上にある時であり．その最小値は

線分 $A'B$ に等しいので

最小値 $\sqrt{(-4-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{41}$

5

5．点$(-5,10)$から円$x^2+y^2=25$に引いた接線の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

接点を(a,b)とすると、この点における接線の方程式は $ax+by=25$ とおける。この接線が$(-5,10)$を通るので

$-5a+10b=25$

$\therefore\ a-2b=-5 \cdots ①$

また、接点(a,b)は円 $x^2+y^2=25$ 上より

$a^2+b^2=25 \cdots ②$

①②を連立して、aを消去すると

$b^2-4b=0 \quad \therefore\ b=0,4$

この時 ①より $a=-5,3$

10

以上より

接点$(-5,0)$の時、$-5x=25$ つまり $x=-5$

接点$(3,4)$の時、$3x+4y=25$

別 接線の傾きをmとすると、点$(-5,10)$を通るので

$y-10=m(x+5) \quad \therefore\ mx-y+5m+10=0$

中心5、半径$(0,0)$の円に接するので

「中心と接線との距離が半径に等しい」

$\therefore\ 5=\dfrac{|m\cdot 0-0+5m+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$

$\therefore\ 5=\dfrac{5|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$ より $\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

両辺2乗して

$1=\dfrac{(m+2)^2}{m^2+1}$

より

$m^2+1=(m+2)^2$

$\therefore\ 4m+3=0$

より $m=-\dfrac{3}{4}$

ゆえに $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$

$\therefore\ 3x+4y=25$

この時 接点は係数より $(3,4)$

また 半径5より

$x=-5$ も接線である

この時、接点は$(-5,0)$

以上より

$3x+4y=25$, $(3,4)$

$x=-5$ $(-5,0)$

6．直線$l：kx-y-k=0$と円$C：x^2+y^2-2x-6y+7=0$について，以下の問いに答えよ。

(1) 直線lは，kの値によらず定点を通る。この定点の座標を求めよ。

$kx-y-k=0$ をkについての恒等式とみると

$k(x-1)-y=0$

$\therefore\ x-1=0,\ y=0$ ならば、上式はkの値によらず成り立つ。

5

つまり、この直線は$(1,0)$を必ず通る。

(2) 直線lと円Cとの共有点の個数を，kの値の範囲によって場合分けせよ。

$x^2+y^2-2x-6y+7=0$

$(x-1)^2+(y-3)^2=3$

中心$(1,3)$、半径$\sqrt{3}$

以下、中心と直線との距離をd、半径をrとすると

$d=\dfrac{|k\cdot 1-3-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}$, $r=\sqrt{3}$

・共有点2個 $\Leftrightarrow d<r$

よって $\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}<\sqrt{3}$

両辺正より、2乗して

$\dfrac{9}{k^2+1}<3$

$\therefore\ k^2+1>3$

より $k^2-2>0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})>0$

$\therefore\ k<-\sqrt{2},\ k>\sqrt{2}$

・共有点1個 $\Leftrightarrow d=r$

・共有点0個 $\Leftrightarrow d>r$

も同様より

$k<-\sqrt{2},\ k>\sqrt{2} \cdots$ 2個

$k=\pm\sqrt{2} \cdots$ 1個

$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \cdots$ 0個

10

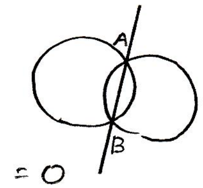
7．2円$x^2+y^2+2x-4y-12=0\cdots①$，$x^2+y^2-4x+2y-6=0\cdots②$について，2円の交点を$A$，$B$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線ABの方程式を求めよ。

直線ABは2円の交点を通る直線より

$x^2+y^2+2x-4y-12+k(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$

において、$k=-1$ とすればよい



$\therefore\ 6x-6y-6=0$

$\therefore\ x-y-1=0$

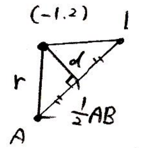
5

(2) 線分ABの長さを求めよ。

円①は $(x+1)^2+(y-2)^2=17$ より 中心$(-1,2)$ 半径

また、中心$(-1,2)$から直線ABまでの距離dは

$d=\dfrac{|-1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



よって、円①の半径をrとすると三平方の定理より

$r^2=d^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$

$\therefore\ \dfrac{1}{4}AB^2=(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{2})^2=9$

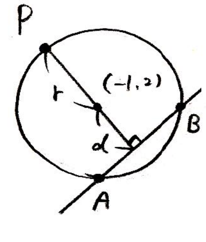
$\therefore\ AB^2=36$で $AB>0$より

$AB=6$

(3) 円①上を点Pが動くとする。このとき，$\triangle PAB$の面積の最大値を求めよ。

図の場所にPがある時

$\triangle PAB$の面積は最大となる。



この時の面積は

$\dfrac{1}{2}AB(r+d)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6(\sqrt{17}+2\sqrt{2})$

$=3(\sqrt{17}+2\sqrt{2})$

5