数学演習（図形と方程式）Ｈ２０．２．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の点の座標を求めよ。

(1)　2 点 A $(2,\ 5)$，B $(3,\ 7)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点，外分する点

(2)　2 点 A $(-1,\ 5)$，B $(3,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を $1:3$ に内分する点，外分する点

(3)　2 点 A $(-2,\ 5)$，B $(6,\ -9)$ を結ぶ線分 AB の中点

2．2 円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ。また，2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

3．中心が点 $(2,\ 2)$ で，円 $x^2+y^2-2y-19=0$ に接する円の方程式を求めよ。

4．x 軸と直線 $x+y=1$ に接し，中心が x 軸の上側にあり，半径が 3 である円の方程式を求めよ。

5．円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

6．次の円と直線の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$x^2+y^2+4y=0$，$y=kx+2$

7．平面上の 2 点を A (1, 1)，B (2, 3) とする。点 P が放物線 $y=x^2+4x+11$ 上を動くとき，△PAB の面積の最小値を求めよ。

8．3 直線 $x+3y=2$，$x+y=0$，$ax-2y=-4$ が三角形を作らないような，定数 a の値を求めよ。

9．△ABC において，辺 BC を 3 等分する 2 点を D，E とするとき，等式 $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+4DE^2$ が成り立つことを証明せよ。

10．直線 ℓ ：$y=x+1$ と 2 点 A (1, 1)，B (3, 1) を考える。ℓ に関して B と対称な点を C とすると，C の座標は $\left(^{ア}\boxed{},\ ^{イ}\boxed{}\right)$ である。

また，点 P が ℓ 上を動くとき，AP＋BP が最小となる P の座標は $\left(^{ウ}\boxed{},\ ^{エ}\boxed{}\right)$ であり，そのときの最小値は $^{オ}\boxed{}$ となる。

数学演習（図形と方程式）Ｈ２０．２．２８解答

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次の点の座標を求めよ。

(1)　2 点 A$(2,\ 5)$，B$(3,\ 7)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点，外分する点

(2)　2 点 A$(-1,\ 5)$，B$(3,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を $1:3$ に内分する点，外分する点

(3)　2 点 A$(-2,\ 5)$，B$(6,\ -9)$ を結ぶ線分 AB の中点

解答　(1)　内分点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$；外分点 $(4,\ 9)$

(2)　内分点 $(0,\ 4)$；外分点 $(-3,\ 7)$　　(3)　$(2,\ -2)$

(1)　内分する点，外分する点の順に

$\left(\dfrac{1\times2+2\times3}{2+1},\ \dfrac{1\times5+2\times7}{2+1}\right)$ より　$\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$

$\left(\dfrac{-1\times2+2\times3}{2-1},\ \dfrac{-1\times5+2\times7}{2-1}\right)$ より　$(4,\ 9)$

(2)　内分する点，外分する点の順に

$\left(\dfrac{3\times(-1)+1\times3}{1+3},\ \dfrac{3\times5+1\times1}{1+3}\right)$ より　$(0,\ 4)$

$\left(\dfrac{(-3)\times(-1)+1\times3}{1-3},\ \dfrac{(-3)\times5+1\times1}{1-3}\right)$ より　$(-3,\ 7)$

(3)　$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{5+(-9)}{2}\right)$ より　$(2,\ -2)$

２．2 円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ。また，2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$5x^2+5y^2-16x-8y=0$，$4x+2y-5=0$

k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-2y+1)+(x^2+y^2-4)=0\ \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

[1]　図形 ① が原点を通るとき

$k\cdot1-4=0$　　よって　$k=4$

これを ① に代入して整理すると　$5x^2+5y^2-16x-8y=0$

これが求める円の方程式である。

[2]　図形 ① が直線であるとき

x^2，y^2 の項の係数が 0 となることから　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　$4x+2y-5=0$

注意　この解答では，2 円が異なる 2 点で交わることを前提とした。この 2 円の位置関係は，次のようにして確かめられる。

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ を変形すると　$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

よって，2 円の中心間の距離は　$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

また，2 円の半径はともに　2

ここで，$2-2<\sqrt{5}<2+2$ であるから，2 円は異なる 2 点で交わる。

３．中心が点 $(2,\ 2)$ で，円 $x^2+y^2-2y-19=0$ に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$，$(x-2)^2+(y-2)^2=45$

$x^2+y^2-2y-19=0$ を変形すると

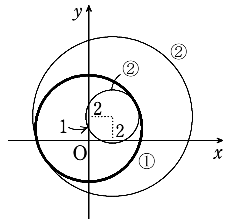
$x^2+(y-1)^2=20$　……①

これは中心が $(0,\ 1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の円を表す。

求める円の半径を r とする。

中心が $(2,\ 2)$ であるから，円の方程式は

$(x-2)^2+(y-2)^2=r^2$ ……②



2 円 ①，② の中心間の距離を d とすると

$d=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

円 ② の中心 $(2,\ 2)$ は円 ① の内部にあるから，2 円が接するのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　円 ② が円 ① に内接する。　　[2]　円 ① が円 ② に内接する。

[1] の場合　$d=2\sqrt{5}-r$　　よって　$r=\sqrt{5}$

[2] の場合　$d=r-2\sqrt{5}$　　よって　$r=3\sqrt{5}$

以上から，求める円の方程式は　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$，$(x-2)^2+(y-2)^2=45$

４．x 軸と直線 $x+y=1$ に接し，中心が x 軸の上側にあり，半径が 3 である円の方程式を求めよ。

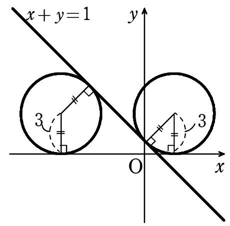
解答　$(x+2-3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$，$(x+2+3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$

x 軸に接し，中心が x 軸の上側にあるから，中心の y 座標は半径 3 に等しい。

よって，求める円の方程式は

$(x-a)^2+(y-3)^2=9$

とおける。



この円が直線 $x+y=1$ に接するから，円の中心 $(a,\ 3)$ とこの直線の距離が円の半径 3 に等しい。

よって　$\dfrac{|a+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$

ゆえに　$|a+2|=3\sqrt{2}$　　これを解いて　$a=-2\pm3\sqrt{2}$

したがって，求める円の方程式は

$(x+2-3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$，$(x+2+3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$

５．円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$2x-3y+2=0$

円の方程式を変形すると　$(x+3)^2+(y-3)^2=13$

円の中心 $(-3,\ 3)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{0-3}{-1+3}=-\dfrac{3}{2}$

接線はこの直線と垂直であり，点 $(-1,\ 0)$ を通るから，その方程式は　$y=\dfrac{2}{3}(x+1)$

よって　$2x-3y+2=0$

6．次の円と直線の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$x^2+y^2+4y=0,\ y=kx+2$

解答 (1) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき 2 個；$k=\pm\sqrt{2}$ のとき 1 個；

$k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$ のとき 0 個

(2) $k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ のとき 2 個；$k=\pm\sqrt{3}$ のとき 1 個；

$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき 0 個

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=-x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入して $x^2+(-x+k)^2=1$ よって $2x^2-2kx+k^2-1=0$

この 2 次方程式について $\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$

よって，共有点の個数は

$-k^2+2>0$ すなわち $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき 2 個

$-k^2+2=0$ すなわち $k=\pm\sqrt{2}$ のとき 1 個

$-k^2+2<0$ すなわち $k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$ のとき 0 個

別解 $y=-x+k$ から $x+y-k=0$

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線の距離を d とすると

$$d=\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

また，円の半径は 1

$d<1$ のとき，共有点の個数は 2 個である。このとき

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<1$ ゆえに $|k|<\sqrt{2}$ すなわち $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

$d=1$ のとき，共有点の個数は 1 個である。このとき

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=1$ ゆえに $|k|=\sqrt{2}$ すなわち $k=\pm\sqrt{2}$

$d>1$ のとき，共有点の個数は 0 個である。このとき

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}>1$ ゆえに $|k|>\sqrt{2}$ すなわち $k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+4y=0 & \cdots\cdots ① \\ y=kx+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入して $x^2+(kx+2)^2+4(kx+2)=0$

よって $(k^2+1)x^2+8kx+12=0$

この 2 次方程式について $\dfrac{D}{4}=(4k)^2-12(k^2+1)=4(k^2-3)$

よって，共有点の個数は

$k^2-3>0$ すなわち $k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ のとき 2 個

$k^2-3=0$ すなわち $k=\pm\sqrt{3}$ のとき 1 個

$k^2-3<0$ すなわち $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき 0 個

7．平面上の 2 点を A$(1,\ 1)$，B$(2,\ 3)$ とする。点 P が放物線 $y=x^2+4x+11$ 上を動くとき，△PAB の面積の最小値を求めよ。

解答 $\dfrac{11}{2}$

P$(t,\ t^2+4t+11)$ とおく。

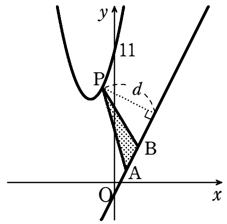
直線 AB の方程式は

$y-1=\dfrac{3-1}{2-1}(x-1)$ すなわち $2x-y-1=0$

また AB$=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

点 P と直線 AB の距離 d は

$$d=\frac{|2t-(t^2+4t+11)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-(t^2+2t+12)|}{\sqrt{5}}=\frac{|t^2+2t+12|}{\sqrt{5}}=\frac{|(t+1)^2+11|}{\sqrt{5}}$$



よって，d は $t=-1$ のとき最小値 $\dfrac{11}{\sqrt{5}}$ をとる。

このとき，△PAB の面積 S は最小で $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{11}{\sqrt{5}}=\dfrac{11}{2}$

参考 面積が最小になるときの P の座標は $(-1,\ 8)$

8．3 直線 $x+3y=2$，$x+y=0$，$ax-2y=-4$ が三角形を作らないような，定数 a の値を求めよ。

解答 $a=-\dfrac{2}{3},\ -2,\ 2$

$x+3y=2$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y=-4$ ……③ とする。

① の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，② の傾きは -1，③ の傾きは $\dfrac{a}{2}$

よって，3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないとき，次の 2 つの場合がある。

[1] ③ が ① または ② と平行になる。

③ が ① と平行になるとき $\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{3}$ ゆえに $a=-\dfrac{2}{3}$

③ が ② と平行になるとき $\dfrac{a}{2}=-1$ ゆえに $a=-2$

[2] 3 直線が 1 点で交わる。

①，② を連立して解くと $x=-1,\ y=1$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は $(-1,\ 1)$

③ が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき

$a\cdot(-1)-2\cdot1=-4$ よって $a=2$

以上から，求める a の値は $a=-\dfrac{2}{3},\ -2,\ 2$

9．△ABC において，辺 BC を 3 等分する 2 点を D，E とするとき，等式 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2+4\mathrm{DE}^2$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

辺 BC を x 軸上に，頂点 B を原点 O にとり，右の図のように

C$(3c,\ 0)$，D$(c,\ 0)$，E$(2c,\ 0)$，A$(a,\ b)$

とする。このとき

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=(a^2+b^2)+\{(a-3c)^2+b^2\}$

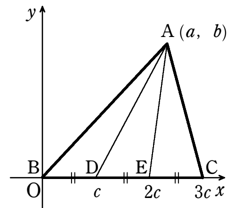
$=2a^2+2b^2+9c^2-6ca$

$\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2+4\mathrm{DE}^2$

$=\{(a-c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}+4c^2$

$=2a^2+2b^2+9c^2-6ca$

よって $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2+4\mathrm{DE}^2$



10. 直線 ℓ：$y=x+1$ と 2 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 1)$ を考える。ℓ に関して B と対称な点を C とすると，C の座標は (ア ☐，イ ☐) である。

また，点 P が ℓ 上を動くとき，AP＋BP が最小となる P の座標は (ウ ☐，エ ☐) であり，そのときの最小値は オ ☐ となる。

解答 (ア) 0 (イ) 4 (ウ) $\dfrac{3}{4}$ (エ) $\dfrac{7}{4}$ (オ) $\sqrt{10}$

(前半) C の座標を $(p,\ q)$ とする。

線分 BC の中点が直線 ℓ 上にあるから $\dfrac{1+q}{2}=\dfrac{3+p}{2}+1$

よって $p-q=-4$ ……①

直線 BC が直線 ℓ に垂直であるから $\dfrac{q-1}{p-3}\cdot1=-1$

よって $p+q=4$ ……②

①，② から $p=0,\ q=4$

したがって，点 C の座標は $({}^{ア}0,\ {}^{イ}4)$

(後半) BP＝CP であるから AP＋BP＝AP＋CP

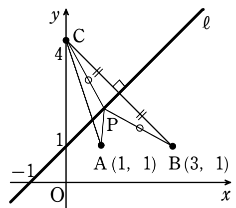
よって，AP＋BP が最小になるのは，3 点 A，P，C が一直線上にあるとき，すなわち点 P が直線 ℓ と直線 AC の交点と一致するときである。

直線 AC の方程式は

$y-4=\dfrac{1-4}{1-0}(x-0)$ すなわち $y=-3x+4$

$y=x+1$ と $y=-3x+4$ を連立して解くと

$x=\dfrac{3}{4},\ y=\dfrac{7}{4}$



よって，AP＋BP が最小となる P の座標は $\left({}^{ウ}\dfrac{3}{4},\ {}^{エ}\dfrac{7}{4}\right)$ であり，このとき

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{AC}=\sqrt{(0-1)^2+(4-1)^2}={}^{オ}\sqrt{10}$