数学演習（図形と方程式）Ｈ２０．２．４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．点 $(3, 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

２．点 $(1, -2)$ を通り，x 軸および y 軸に接する円の方程式を求めよ。

３．座標平面上に，曲線 $C: y=-x^2+4$ と直線 $l: y=4x$ がある。C と l の交点を P, Q とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さを求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 P から点 Q まで，点 R が動くとする。このとき，$\triangle PQR$ の面積の最大値と，そのときの点 R の座標を求めよ。

4．点 $A(1, 1)$ と直線 $l : y=2x+1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l に関して，点 A と対称な点の座標を求めよ。

(2) 直線 l に関して，直線 $2x-3y+1=0$ と対称な直線の方程式を求めよ。

(3) 直線 l 上を点 P が動くとする。原点を O とするとき，線分の和 $OP+PA$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

5．円 $C : x^2+y^2=12$ とし，点 $A(4, 8)$ から円 C に引いた接線と円 C との接点をそれぞれ P, Q とする。また，原点を O とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 四角形 $OPAQ$ の面積を求めよ。

(2) 直線 PQ の方程式を求めよ。

(3) 線分 PQ の長さを求めよ。

(4) 円 C 上の点 P, Q 以外の場所を点 R が動く。このとき，$\triangle RPQ$ の面積の最大値と，そのときの点 R の座標を求めよ。

1．点（3，1）から円$x^2+y^2-2x+6y=0$に引いた接線の方程式を求めよ。

接線は(3,1)を通るので

$$y-1=m(x-3)$$

∴ $mx-y-3m+1=0$

とおける。

$x^2+y^2-2x+6y=0$

$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9=0$

∴ $(x-1)^2+(y+3)^2=10$

中心$(1,-3)$ 半径$\sqrt{10}$

よって中心と接線との距離が半径に等しいので

$$\frac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

両辺2乗して

$$\frac{(-2m+4)^2}{m^2+1}=10$$

分母払って

$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

$4m^2-16m+16=10m^2+10$

∴ $3m^2+8m-3=0$

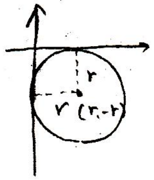
$(3m-1)(m+3)=6$

∴ $m=\frac{1}{3},\ -3$

・$m=\frac{1}{3}$の時　$y-1=\frac{1}{3}(x-3)$　∴ $y=\frac{1}{3}x$

・$m=-3$の時　$y-1=-3(x-3)$　∴ $y=-3x+10$

2．点(1,−2)を通り，x軸およびy軸に接する円の方程式を求めよ。



求める円は第4象限に存在し

半径をrとすると $(r>0)$

中心は$(r,-r)$とおける

ゆえに円の方程式は

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

点$(1,-2)$を通るので

$$(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$r^2-2r+1+r^2-4r+4-r^2=0$

∴ $r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$

∴ $r=1, 5$

($r>0$を満たす)

$r=1$の時

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1$$

$r=5$の時

$$(x-5)^2+(y+5)^2=25$$

3．座標平面上に$y=-x^2+4$で表される曲線Cと$y=4x$で表される直線lがある。Cとlの交点をP，Qとするとき次の問いに答えよ。

(1) 線分PQの長さを求めよ。

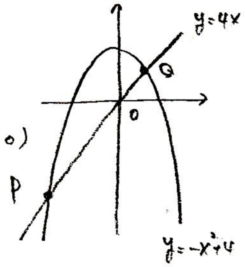
(2) C上のPからQまでの間を点Rが動くとする。三角形PQRの最大値とそのときのRの座標を求めよ。

(1) P,Qのx座標をα,βとおくと

α,βは方程式

$-x^2+4=4x$　$(x^2+4x-4=0)$

の2解である。



よって解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-4$ … ①

また、P,Qは$y=4x$上にあるので

$P(\alpha,4\alpha)$，$Q(\beta,4\beta)$ とおける

よって $PQ^2=(\beta-\alpha)^2+(4\beta-4\alpha)^2$

$=(\beta-\alpha)^2+16(\beta-\alpha)^2=17(\beta-\alpha)^2$

であり　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-4)^2-4(-4)$

$=16+16=32$

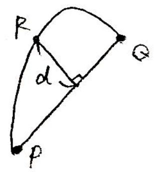
∴ $PQ^2=17\times 32$ より

$PQ>0$から　$PQ=4\sqrt{34}$

(2) Rを$(t,-t^2+4)$とおく。

$PQ=4\sqrt{34}$で一定より

点Rと直線$y=4x$との距離dは



$$d=\frac{|4\cdot t-(-t^2+4)|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|t^2+4t-4|}{\sqrt{17}}$$

ここで、点Rは$y=4x$の上側にあるので、

$(-t^2+4)>4\times t$　∴ $t^2+4t-4<0$

∴ $d=-\frac{1}{\sqrt{17}}(t^2+4t-4)$

$=-\frac{1}{\sqrt{17}}(t+2)^2+\frac{8}{\sqrt{17}}$　より　$t=-2$の時 dは最大

以上より　$R(-2,0)$の時．最大値 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{34}\times\frac{8}{\sqrt{17}}=16\sqrt{2}$

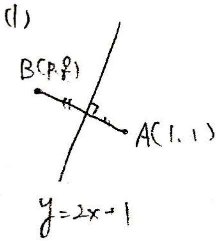
4．点Aの座標を$(1,1)$とし，直線$y=2x+1$をlとする。

(1) lに関して点Aと対称な点の座標を求めよ。

(2) lに関して直線$2x-3y+1=0$と対称な直線の方程式を求めよ。

(3) 直線l上を点Pが動くとする。原点をOとするとき，OP+PAの最小値とそのときの点Pの座標を求めよ。

(1)



求める点をB(p,q)とおき

(1,1)をAとおくと

① AB ⊥ l

② ABの中点はl上

が成り立つ。

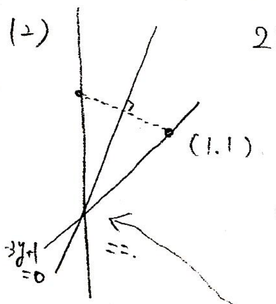
①より $\frac{q-1}{p-1}\times 2=-1$ ∴整理して $p+2q=3$

②より $\frac{q+1}{2}=2\cdot\frac{p+1}{2}+1$ ∴整理して $2p-q=-3$

連立して $p=-\frac{3}{5}$　$q=\frac{9}{5}$

∴ $\left(-\frac{3}{5},\ \frac{9}{5}\right)$

(2)



$2x-3y+1=0$は点(1,1)を通る。

よって求める直線は(1)の結果より$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{9}{5}\right)$を通る。

また求める直線は$2x-3y+1=0$とlの交点を通るので

$$2x-y+1+k(2x-3y+1)=0$$

とおける。上式は$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{9}{5}\right)$を通るので

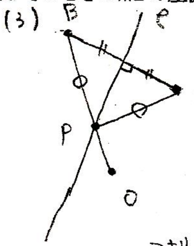
$$2\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{9}{5}+1+k\left(2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-3\cdot\frac{9}{5}+1\right)=0$$

解いて $k=-\frac{5}{14}$

よって $2x-y+1-\frac{5}{14}(2x-3y+1)=0$

∴ $y=-18x-9$

(3)



左図の時 OP+PAの長さは最小となる。

つまりPは OBとlの交点の時

$B\left(-\frac{3}{5},\ \frac{9}{5}\right)$より 直線OBの式は$y=-3x$

また $l: y=2x+1$ より

$-3x=2x+1$

∴ $x=-\frac{1}{5}$

よって $P\left(-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

また、OP+PAの長さは、この時 OBの長さに等しいので

OP+PAの最小値

$=OB$

$=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}$

$=\frac{3}{5}\sqrt{1^2+3^2}$

$=\frac{3}{5}\sqrt{10}$

5．円C：$x^2+y^2=12$とし，点A(4，8)から円Cに引いた接線と円との~~交点~~接点をそれぞれP,Qとする。また，原点をOとする。

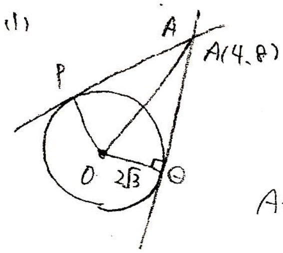
(1) 四角形OPAQの面積を求めよ。

(2) 直線PQの方程式を求めよ。

(3) 線分PQの長さを求めよ。

(4) 円C上の点P,Q以外の場所を点Rが動く。三角形RPQの面積の最大値とそのときの点Rの座標を求めよ。

(1)



$OA=\sqrt{4^2+8^2}$

$=4\sqrt{5}$.

また $OQ=2\sqrt{3}$ より

$AQ=\sqrt{OA^2-OQ^2}$

$=\sqrt{80-12}$

$=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$.

よって

四角形の面積

$=\triangle OAQ\times 2$個分

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{17}\times 2=4\sqrt{51}$

(2) $\angle OPA=\angle OQA=90^\circ$ より

OAを直径とする円は4点O,P,A,Qを通る

OAの中点は$\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{0+8}{2}\right)$ ∴ (2,4)

で半径は$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

∴この円の方程式は

$(x-2)^2+(y-4)^2=(2\sqrt{5})^2$

つまり

$x^2+y^2-4x-8y=0$

とおける。直線PQは2円 $\begin{cases}x^2+y^2=12\\ x^2+y^2-4x-8y=0\end{cases}$

の交点を通る直線より

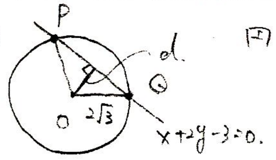
$x^2+y^2-12+k(x^2+y^2-4x-8y)=0$

とおいて$k=-1$とすることで得られる

∴ $x^2+y^2-12-(x^2+y^2-4x-8y)=0$

整理して $x+2y-3=0$

(3)



円$x^2+y^2=12$の中心と直線PQとの距離dは

$d=\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{5}}$

よって三平方の定理より

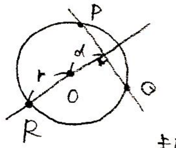
$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2+d^2=r^2$

$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2=(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2=12-\frac{9}{5}=\frac{51}{5}$

∴ $\frac{PQ}{2}=\sqrt{\frac{51}{5}}$ よって $PQ=2\sqrt{\frac{51}{5}}$

(4) 下図の場所に点Rがきたとき、△RPQの面積は最も

(PQ一定より高さが最大となる)



よって(3)より $PQ=2\sqrt{\frac{51}{5}}$

また、高さは$r+d$

$=2\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{5}}=2\sqrt{3}+\frac{3}{5}\sqrt{5}$

よって△RPQの面積の最大値は

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{51}{5}}\times\left(2\sqrt{3}+\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$

$=\sqrt{\frac{51}{5}}\times\frac{10\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{85}+3\sqrt{51}}{5}$

またRは、PQに垂直で中心を通る直線と円$x^2+y^2=12$の交点である

$PQ: y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ より 上記の直線は$y=2x$

∴ $\begin{cases}x^2+y^2=12\\ y=2x\end{cases}$

連立して

$x^2+(2x)^2=12$ ∴ $x^2=\frac{12}{5}$ より

$x<0$から $x=-2\sqrt{\frac{3}{5}}$

よって $R\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}},\ -4\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$